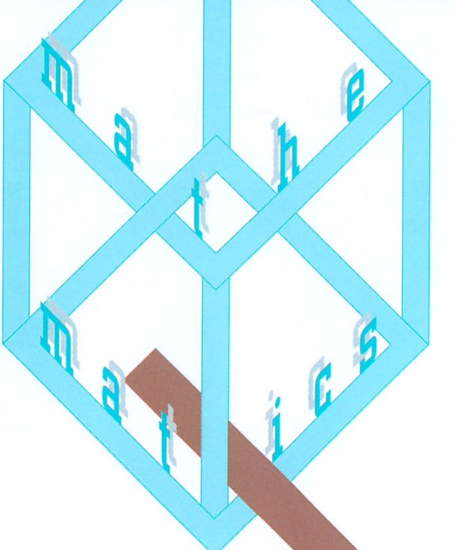
数理物理への誘い3

最新の動向をめぐって

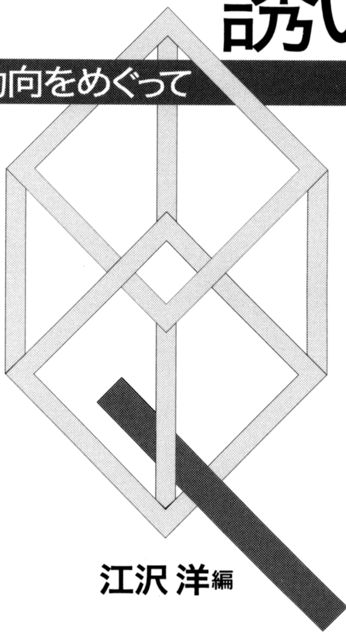


江沢 洋編

[発行]遊星社

数理物理への誘い3

最新の動向をめぐって



江沢 洋 編

遊星社

数理物理への誘い 3

目　次

装丁＝海保 透

【第1集の内容】

【第2集の内容】

まえがき

この本は『数理物理への誘い』シリーズの第3集です．第1集，第2集は，それぞれ1994年，1997年に刊行されました．

20世紀の初め，相対性理論と量子力学は，数学に助けられて生まれ，そしてそれぞれ新しい数学の勃興(ぼっこう)を促し，さらにその数学がもたらした新しい概念や方法に助けられて発展しました．その後，物理学と数学は各自の道を歩むかに見えた時期もありましたが，大戦後に再び密接な関係をもち始め，両者の交流の場が急速にひろがって数理物理学とよばれるようになりました．それは単なる数学的方法にとどまらず，物理学の概念的な構成にも深い影響を及ぼしてきたのです．

そうした数理物理学の動きを物理や数学などの広い範囲の学生，研究者の方々に知っていただくため，荒木不二洋さんと学習院大学でサマー・スクールを始めたのは1987年でした．以来，1990年と1998年を除いて毎年，日本全国から多数の参加を得てスクールを続けてくることができました．よく準備して講義をしてくださった講師の先生方と，活発な議論で学究の場を盛り上げてくださった参加者の方々のおかげです．

『数理物理への誘い』シリーズは，講師の先生方にお願いして，サマー・スクールでの講義と討論の経験に立ち，それをいっそうかみ砕いて，より広汎な，大学初年級の学生をふくむ広汎な方々に数学と物理学の合奏の醍醐味を伝えるよう書き下していただくものです．特に，研究の動機と考え方を平易に語ってくださるようお願いしています．さいわい，この試みは広く，かつ強い支持をいただくことができました．

このシリーズ第3集には，1994年から1997年にいたるサマー・スクールの講義から，七つの話題を載せることができました．ご多忙のためご寄稿いただけなかった先生がおられるのは，残念です．

磯崎先生の第1話は，量子力学とはどんなものかを説明することから始めて，原子核1個と電子1個の系から核も電子もたくさんある多体系まで，束縛状態と散乱状態にわたって数学的な特質を明快に述べています．物理的な描像を導きに数学が構成されてゆく有様が味わっていただけると思います．

栗田先生の第2話は量子力学の多体問題の中に解けるモデルをさがしてゆく話で，1次元系に限られていますが，マクドナルド多項式など意外な展開を見せます．梁先生の第3話は共形変換に関して対称な，いわゆる共形場を，対称性を破る摂動によって——解けるという性質を失わないように——変形してゆく話ですが，実り多い展開に眼をみはることになるでしょう．共形変換とは時空座標の“局所的”な（場所ごとに倍率の異なる）等方的スケール変換のことで，物性論から素粒子論まで広く現れます．中西先生の第4話は場の理論の解けるモデルとある種の対称性の関係を説明するもので，数学的方法の力強さを感じさせてくれます．

森田先生の第5話は，いわゆる非可換幾何学を——もともと素粒子の統一理論の発展のなかで着想されたものですが——物理の言葉で説明します．物理の人にも数学の人にも，それぞれの方向からの解釈に役立つでしょう．20世紀の物理は真空にさえも豊富な構造を与えてきました．そして，数学もまた！

新井先生の第6話は，空間に粒子の入り込めない領域がある場合の量子力学です．たとえば，アハラノフ-ボーム効果では，無限に長い鉄芯に隙間なく導線を巻いたコイルに電流を流し，コイルの中に（中にだけ！）磁場をつくります．そしてコイル表面に細工をして，これに電子波を当ててもコイルの中

には入れないようにするのです．それでも，電子波は磁場から影響を受ける，コイルの外に磁場はないのに！　これがアハラノフ-ボーム（AB）効果で，日立基礎研究所の外村彰氏が疑問の余地なく実証しました．電磁場は可換なゲージ場に属します．その場合の研究（『数理物理への誘い』，第2集）を今回は非可換ゲージ場の場合に拡張するのです．ゲージ場が平坦でないと正準交換関係の表現がいわゆるシュレーディンガー表現と同値でなくなり，これを，非可換ゲージ場における AB 効果ということになります．可換なゲージ場の場合にも，同じ非同値性が AB 効果の代数的な（行列力学における）言い表しであったからです．ただし，ここでいう正準交換関係で運動量の役をするのは（質量）×（速度）の演算子であって，正準運動量ではないこと，新井さんも注意しているとおりです．

最後に，小澤先生の第7話は量子力学の観測の理論．観測の引き起こす状態変化に関する小澤理論の解説です．これによって，この注目すべき定式化の理解が広まることを期待します．実験技術が進歩して，観測による波束の収縮が“目に見える”ようになりつつあります．量子計算機もホットな話題です．観測の理論は，思考実験の世界からとびださなければなりません．

このように『数理物理への誘い』シリーズの第3集にも魅力的な主題の解説を盛ることができました．「誘い」にのってくださる方が多いことを願っています．

どうか，気軽に読み始めてください．それぞれの解説は独立しています．どこからでも，読みやすそうなところから始めてください．それとも，手強そうなところから挑戦しますか？

なお，1999年のサマー・スクールの講義録は World Scientific 社から International Journal of Mod. Phys. B の special issue として近く刊行されます．主題は“くりこみ群”です．以後も英文の刊行を続けたい

と考えています.

最後になりましたが，多忙な時間を割いてわかりやすい解説に努力してくださった諸先生に心から感謝します．このシリーズの維持に力を尽くしてくださっている遊星社の西原昌幸さんにもお礼を申し上げます.

2000年7月

江沢　洋

第1話

原子や分子を数学で見る ——多体問題の数学

磯崎　洋

1°　はじめに

原子や分子を扱う数学のお話しをしましょう．この話のもとになっているのは５年ほど前に学習院大学のサマースクールで行なった「量子力学的多体問題の数学的側面」という講演です（参考文献の [1]）．このサマースクールに来られるのは普段ご自分の仕事や研究に量子力学を使っておられる方々が多いので，そのころまでに得られていた量子力学における多体問題に関する数学上のいろいろな研究を紹介しました．そこでは数学的な概念を詳しく正確に書くことに努めましたが，そのためにかなり難解なものになってしまいました．ここでは同じ内容を大学１,２年の数学的知識でわかるようにかみ砕いてみようと思います．

量子力学という物理学の分野があることは，よくご存じだろうと思います．原子や分子などの小さい粒子の物理的性質を考える学問です．力学という名前がついていますが，そこで使われる考え方はニュートン力学の場合とは大分違います．

線形代数で行列を習います．たとえば，2×2 行列とは

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

という形をしたものです．a, b, c, d は複素数です．A の随伴行列とは

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

という行列のことです．$A = A^*$ のとき A を自己共役な行列といいます．量子力学で活躍するのはこの自己共役な行列です．それは次のような理由からです．

$x = (x_1, x_2)$，$y = (y_1, y_2)$ という複素ベクトルに対して，その内積を

$$(x, y) = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 \tag{1.3}$$

としましょう．すると

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \tag{1.4}$$

となります．特に $A = A^*$ のときには $(Ax, y) = (x, Ay)$ ですから，

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} = \text{実数} \tag{1.5}$$

となることがわかります．量子力学では原子や分子を考えようとするときには，まずあるベクトル x をもってきます．次に，物理的性質に関係した自己共役な行列 A をもってきて (Ax, x) を計算するとこれが物理的な量（たとえばエネルギー）になる，というように考えるのです．行列 A があるベクトル $x \neq 0$ と複素数 λ に対して $Ax = \lambda x$ をみたすとき，λ を A の固有値，x を A の固有ベクトルというのでした．自己共役な行列の固有値は実数になり，固有ベクトルは空間の基底になるということは大事な知識です．A が物理量に関連した行列のときは，固有値，固有ベクトルが物理量や物理的状態の代表の役割をします．

基本的な考え方はこれでいいのですが，実際にはいろいろ大変です．第一にたいていの場合，上のような2次元空間ではなしに，無限次元の空間を考えなくてはならないのです．早くも「無限次元」という恐ろしげな言葉が出てきました．ここは「ベクトルの成分が非常にたくさんある」という具合に考えることにして，さっさと通りすぎることにしましょう．次に，A を上のように行列の形で表すことは必ずしも有効ではありません．少し距離をおいてみると，数ベクトルや行列という形にこだわるよりも，内積のある線形空間とその上の線形写像というように考えた方が結局はわかりやすい，ということ

が量子力学の研究の初期の段階で認識され，その方向で進んできました．

幸いなことに，これから問題にしたい原子や分子の場合には考えるべき線形写像の形はだいたい決まっています．まずベクトルとしては，x の関数を考えます．x は場合によって違いますが，3次元空間や n 次元空間を動く変数です．そして，線形写像 A としては

$$A = -\Delta + V(x) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + V(x) \tag{1.6}$$

という形を考えます．$V(x)$ は実数値関数です．Δ はラプラシアンと呼ばれています．このような A を**シュレーディンガー**（Schrödinger）**作用素**といいます．また，線形写像のかわりに線形作用素という習慣がありますので，それに従います．（物理では演算子ということが多いようですが．）原子や分子の性質を調べることは，このシュレーディンガー作用素の固有値や固有ベクトルの性質を調べることになりました．たとえば重い原子核が1個あり，そのまわりに1個の電子があるとしましょう．この場合，x は3次元空間を動き，$V(x)$ は $|x|$ のみの関数になります．たとえばクーロンポテンシアル $V(x) = -C/|x|$ のときには，シュレーディンガー作用素の固有値や固有ベクトルは具体的に求められており，量子力学の教科書に書かれています．$V(x)$ が $|x|$ のみの関数でないときには，シュレーディンガー方程式の解を具体的に書き表すのは難しいのですが，それでもかなり詳しい性質が知られています．

原子核のまわりに電子が2個以上ある場合を**多体問題**といいますが，この多体問題が大変なのです．まず，具体的に解ける例がありません．そのために，解の性質を調べようにもあまり手がかりがありません．物理の教科書を見ても，多体系の部分になりますと内容が薄くなります．このような理由のために多体系に関する数学的知識は空白部分がかなりあったのですが，この20年ほどの間に急速に多体シュレーディンガー方程式の解の性質が詳しく調べられるようになってきました．その研究の様子を紹介するのが，この解説の目的です．

定理の証明ではなしに，現在までに知られていることの意味をわかりやすく説明したいというのが目論見でしたが，果たしてどこまでできることやら．多体問題に関連した数学では，どうしても数式や記号が増えてきます．それらをあえて省いて説明しようとするために，結論を完全には書ききれないところも出てきます．そのときはサマースクールの講演原稿をご覧になってください．前置きはこれくらいにして，本論に入りましょう．

2° 自己共役性

まず，舞台を作りましょう．$\boldsymbol{R}^n$ とは $x=(x_1, \cdots, x_n)$（各 x_i は実数）という点のなす n 次元空間です．この中で小さい粒子が動いているとしましょう．$L^2(\boldsymbol{R}^n)$ とは

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |\psi(x)|^2 dx = \|\psi\|^2 < \infty \tag{2.1}$$

をみたす x の関数 $\psi(x)$ の全体です．これが舞台です．$\varphi, \psi \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$(\varphi, \psi) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \overline{\varphi(x)}\, \psi(x)\, dx \tag{2.2}$$

を φ, ψ の内積といいます．シュレーディンガー作用素とは

$$H = -\Delta + V(x) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + V(x) \tag{2.3}$$

で表される微分作用素のことです．これが主役です．H という文字を使ったのは，古典力学からの類推で Hamiltonian（ハミルトニアン）と呼ばれるからです．$V(x)$ は粒子に働く力の源となるポテンシアルで，実数値をとる関数です．

この作用素 H が自己共役であることを説明しましょう．話をわかりやすくするために，$n=1$ とします．すると，

$$H\psi = -\psi''(x) + V(x)\psi(x)$$

となります．自己共役性のためには

$$(H\varphi, \psi) = (\varphi, H\psi) \tag{2.4}$$

となればいいのですが，部分積分によって

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi''(x)}\,\psi(x)\,dx = -\Big[\overline{\varphi'(x)}\,\psi(x)\Big]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi'(x)}\,\psi'(x)\,dx$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)}\,\psi''(x)\,dx = -\Big[\overline{\varphi(x)}\,\psi'(x)\Big]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi'(x)}\,\psi'(x)\,dx$$

となり，$x = \pm\infty$ のときには $\varphi(x) = \varphi'(x) = 0$ となりますから

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi''(x)}\,\psi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)}\,\psi''(x)\,dx$$

この両辺に $\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\overline{\varphi(x)}\,\psi(x)\,dx$ を加えて（2.4）が示されました．いきなり記号と積分計算が出てきました．先を急ぐ人と数式を追うのが嫌いな人は，以上のことでわかったことにして，次の第3節にいきましょう．

引き続いて読んでおられるあなたにはもう少し大事なことをお話ししましょう．上の説明は物理の教科書にふつう書かれているものですが，実はこの説明では具合の悪いことがあります．しかも，ここを曖昧にするために混乱することがあるのです．

$\boldsymbol{R}^1$ 上の関数 $\psi(x)$ であってそれ自身もそのすべての導関数も連続で，しかもある $C > 0$ に対して $\psi(x) = 0$ $(|x| > C)$ をみたすもの全体を $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$ と書きます．C は ψ ごとに違ってもかまいません．すると（2.4）は

$$(H\varphi, \psi) = (\varphi, H\psi) \qquad \varphi, \psi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$$

を意味します．このことを H は $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$ を定義域として対称であるといいます．定義域とは H という作用素を作用させる関数全体ということです．実はこの対称という性質だけでは不十分なのです．それはいろいろ事情がありますが，第1節での有限次元の場合とは違って $L^2(\boldsymbol{R}^1)$ は無限次元であること，$-\dfrac{d^2}{dx^2}$ という微分作用素は $L^2(\boldsymbol{R}^1)$ 上の連続な作用素ではないことなどが原因

となっています．無限次元空間の中での線形代数を論ずる数学を関数解析学といいますが，関数解析の教科書を開きますと自己共役の定義はずいぶんこみいっています．たとえば黒田［2］を見てください．問題はHの定義域をどのようにとるか，ということにあります．定義域をうまくとってHが自己共役になったとしますと，たとえば次のことがわかります．「任意の$f \in L^2(\boldsymbol{R}^1)$に対して方程式$(H-i)u=f$は解をもち，かつ解はただ一つである．」3次元で考えているときでも$H=-\Delta+V(x)$が自己共役になったとしますと，偏微分方程式$(-\Delta+V-i)u=f$は任意の$f \in L^2(\boldsymbol{R}^3)$に対して解をもち，しかも解はただ一つであることになります．自己共役性は偏微分方程式が解けるということを意味するのですから，なかなか難しいことをいっているのがおわかりいただけるでしょう．特に$V(x)$がクーロンポテンシアルのように特異性をもてば，解$u(x)$もなんらかの意味で特異性をもちそうな気がします．自己共役とは，定義域がはっきりしていること，微分方程式が解けることというのがここまでのまとめです．

このような自己共役性の問題を具体的なハミルトニアンに対して最初に取り上げられたのが，加藤敏夫先生です．加藤先生はフォン・ノイマンの著作を検討されて，ハミルトニアンの自己共役性という基本的な問題がたとえば原子や分子の場合にすら知られていないことに気づかれ，ここを出発点として多方面にわたってシュレーディンガー作用素の数学的研究の基礎を築かれました．初期の研究の様子を参考文献の［3］に書いておられます．学問を開拓するとはこのようなことか，と考えさせられます．

結論をいいますと，原子，分子に対するシュレーディンガー作用素は自己共役になります．それを説明するために，一般化された導関数の話をします．$n=1$の場合を考えます．$n \geq 2$の場合は類推してください．$\boldsymbol{R}^1$上の関数$u(x)$がk回連続的微分可能なら，任意の$\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^{(k)}(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx$$

となります．そこで，$u(x)$ が微分可能でなくても，ある $f(x)$ とすべての $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx$$

が成り立っているとき，$f(x)$ を $u(x)$ の k 次の一般化された導関数といいます．たとえば $u(x) = |x|$ としましょう．この関数は $x = 0$ で微分可能ではありません．しかし，$f(x) = -1$ $(x < 0)$，$f(x) = 1$ $(x \geq 0)$ という関数を考えれば，任意の $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi'(x)\,dx$$

となりますから（証明は考えてみてください），$f(x)$ は $u(x)$ の一般化された導関数です．以後，$u(x)$ の k 次の一般化された導関数を普通の場合と同じ記号を用いて，$u^{(k)}(x)$ あるいは $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^k u(x)$ などと書くようにします．$\boldsymbol{R}^n$ において m 次までの一般化された導関数が存在し，それらがすべて $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に属するような関数全体を $H^m(\boldsymbol{R}^n)$ と書いて，m 次の**ソボレフ**（Sobolev）**空間**ということにしましょう．Sobolev はこのようなことを考えたロシアの数学者です．

さて，原子に対するシュレーディンガー作用素の自己共役性をいい表すと，次のようになります．$\boldsymbol{R}^3$ で

$$H = -\Delta + \frac{C}{|x|}$$

を考えましょう．C は定数です．この H は $H^2(\boldsymbol{R}^3)$ を定義域として自己共役であるというのが主張です．$H^2(\boldsymbol{R}^3)$ に属する関数は一般化された意味で2回微分可能ですから，この主張はごく自然なものではないでしょうか？

もう少し一般的にいいますと，$\boldsymbol{R}^3$ 上の実数値関数 $V(x)$ が原点以外では連続であって，ある $C, \varepsilon > 0$ に対して

$$|V(x)| \leq C|x|^{-(3/2-\varepsilon)} \qquad (|x| < 1)$$

かつ $|x| \to \infty$ で $V(x) \to 0$ をみたしているときには，$-\Delta + V(x)$ は $H^2(\boldsymbol{R}^3)$ を定義域として自己共役となります．

3° スペクトル

3.1 レゾルベント，スペクトル

仏語の辞書で spectre を調べたらまず幽霊と出てきて，次に光学のスペクトルと出てきました．何やらボーッと光るものということなのでしょうか？ここでは作用素のスペクトルを説明しましょう．

$L^2(\boldsymbol{R}^n)$ のように内積をもったベクトル空間をヒルベルト（Hilbert）空間といいます．大事な性質として完備性が仮定されますが，それについては何か本を見てください．H をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ で定義された自己共役作用素としましょう．z を複素パラメーターとして方程式 $(H-z)u=f$ を考えます．この方程式が任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して解 u をもち，かつその解がただ一つであるとき，z は H のレゾルベント集合に属するということにします．H のレゾルベント集合を $\rho(H)$ と書きましょう．$z \in \rho(H)$ に対しては $(H-z)^{-1}=H-z$ の逆作用素が存在します．これを H の**レゾルベント**（resolvent）といいます．solve という文字が入っていますね．解作用素とでも訳したらいいのでしょうか．

複素平面の中でレゾルベント集合の補集合を H の**スペクトル**といい，$\sigma(H)$ と書きます．H が自己共役のときは $\sigma(H)$ は実軸の部分集合になります．実軸上の点がボーッと光っている様子を想像してみてください．H が原子や分子に対するハミルトニアンのときには，$\sigma(H)$ は原子や分子が出す光りと深い関係があります．

$\sigma(H)$ に属する点はその性質に応じていくつかに分類されます．まず，$(H-\lambda)u=f$ の解がただ一つではない場合があります．これは $(H-\lambda)u=0$ をみたす0でない u が存在するということです．このようなとき，λ を固有値，

u を固有ベクトルといいます．$U_\lambda=\{u\in\mathscr{H}\,;\,(H-\lambda)u=0\}$ を固有値 λ に対する固有空間としましょう．U_λ の次元を固有値 λ の重複度といいます．固有値 λ が $\sigma(H)$ に属する他の点から離れていて，しかも λ の重複度が有限のとき，λ を**離散スペクトル**の点であるといいます．$\sigma_d(H)$ を H の離散スペクトルの点全体としましょう．d は discrete の頭文字です．$\sigma(H)$ に属し $\sigma_d(H)$ に属さない点全体の集合は，離散スペクトルの反対ですから集積スペクトルとでもいいたいところですが，**本質的スペクトル**といいます．$\sigma_e(H)$ と書きます．

これまでのところをまとめますと，H のスペクトルの点とは $(H-\lambda)^{-1}$ が存在しないような λ のことです．それは実軸の部分集合で

$$\sigma(H)=\sigma_e(H)\cup\sigma_d(H),\qquad \sigma_e(H)\cap\sigma_d(H)=\phi$$

と分解されます．$\sigma_d(H)$ は離散スペクトルで，ポツポツとある重複度有限の固有値です．

3.2　例

具体例をあげましょう．$L^2(\boldsymbol{R}^3)$ で $H_0=-\Delta$ としますと

$$\sigma(H_0)=\sigma_e(H_0)=[0,\infty)$$

となります．H_0 は自由電子に対応するハミルトニアンです．ただし，質量やプランク（Planck）の定数などの物理的定数は省いてあります．

水素型の原子に対するハミルトニアンは $H=-\Delta-\dfrac{C_0}{|x|}$ （$C_0>0$）という形をしています．このときは

$$\sigma_e(H)=[0,\infty),\qquad \sigma_d(H)=\{-C_0^2/(4n^2)\,;\,n=1,2,\cdots\}$$

となります．これは原子核のそばに1個の電子があるときのハミルトニアンで，$\sigma(H)$ は電子のとりうるエネルギーの値の集合です．電子が $-C_0^2/(4n^2)$ から $-C_0^2/(4m^2)$ というエネルギー状態に遷移するとき，$-C_0^2/(4n^2)+C_0^2/(4m^2)$ というエネルギーをもつ光が射出されるというのがボーアの理論でした．

他の例をあげましょう．平面内に束縛され平面に垂直な一様磁場の中にある電子に対するハミルトニアンは

$$H = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{B}{2}y\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{B}{2}x\right)^2$$

となります．このハミルトニアンのスペクトルは

$$\sigma(H) = \{B(2n+1)\ ;\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

となります．これはポツポツと離れている点の集まりですから，離散スペクトルのように思われるかもしれません．たしかに $B(2n+1)$ は孤立した固有値ですが，その重複度は無限大なので，これは本質的スペクトルです．

3.3　ワイルの定理

これから考えたいことは，スペクトルの様子がわかっている作用素 H_0 に他の作用素 V をつけ加えたら，スペクトルはどう変わるかということです．V は摂動(せつどう)項 perturbation と呼ばれます．外国で天気予報を見ていたら，低気圧が近づいてきたときに perturbation がやってきたと言っていました．大気がかき乱されるということなのでしょうか．

スペクトルの摂動に関してよく知られた定理として，ワイル（H. Weyl）によるものがあります．

定理 3.1　A, B が自己共役作用素で $(A-i)^{-1}-(B-i)^{-1}$ がコンパクト作用素なら，$\sigma_e(A)=\sigma_e(B)$．

ここで，K がコンパクトであるとは次のことを意味します．$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ がヒルベルト空間の中の有界なベクトルの列であるならば，$\{Ku_n\}_{n=1}^{\infty}$ の中から収束する部分列を取り出すことができるというものです．有限次元ではどんな線形作用素もコンパクトです．象徴的にいえば，コンパクトとは「有限次元的」ということです．

たとえば，$H_0=-\Delta$, $H=-\Delta+V(x)$ で $V(x)\to 0$ ($|x|\to\infty$) のときには $(H-i)^{-1}-(H_0-i)^{-1}$ はコンパクトです．したがって，ワイルの定理から $\sigma_e(H)=\sigma_e(H_0)=[0,\infty)$ となりますから，H の離散スペクトルは負の実軸上にポツポツと出てきます．水素型のときはたしかにそうなっていました．

4° 離散スペクトル

前節で出てきた固有値とは，電子が原子核に束縛されて原子核の近くのみを動いているときのエネルギーです．その値を具体的に計算できればよいのですが，これがなかなか難しいのです．有限次元でもサイズの大きい行列の固有値を計算するのは大変なことでした．（ついでながら，電子という言葉を使いましたが，これは具体的なイメージを与えるためで，ここで書かれていることは他の量子力学的粒子にもあてはまります．）

具体的に計算できないのなら，大まかな様子を知ることはできないでしょうか？ たとえば3次元で $-\hbar^2\Delta+V(x)$ ($h=2\pi\hbar$ はプランクの定数) の負の固有値はだいたい何個あるでしょう？ そのための手がかりは次の考え方です．古典力学におけるハミルトニアンを $|p|^2+V(q)$ としますと，$\Omega=\{(q,p)\in\boldsymbol{R}^6\,;\,|p|^2+V(q)<0\}$ は古典力学におけるエネルギーが負となる領域です．そこで，エネルギーに最小単位があるものとし，それは古典力学においては h^3 という体積の領域を占めていると考えましょう．すると，量子力学における負の固有値全体の個数は

$$\frac{\Omega\text{ の体積}}{h^3}=(2\pi\hbar)^{-3}\iint_{|p|^2+V(q)<0}dp\,dq$$

となります．これは $\hbar$ が非常に小さいことを考えますとだいたい正しいことがわかります．このようなこと，つまり定数 $\hbar$ を非常に小さいパラメーターと考えて，量子力学における物理的な量を古典力学における対応物から計算するという考え方を**半古典近似の理論**と呼んでいます．これはシュレーディ

ンガー方程式に関係した数学の問題としてよく研究されています．

ここで，特に $V(q)=-C(1+|q|)^{-\alpha}$ としましょう．このとき

$$\iint_{|p|^2+V(q)<0} dp\,dq = \int\left(\int_{|p|^2<C(1+|q|)^{-\alpha}} dp\right)dq$$
$$= \frac{4}{3}\pi C^{3/2}\int_{R^3}(1+|q|)^{-3\alpha/2}dq$$

となりますから，$\alpha>2$ なら負の固有値は有限個，$\alpha<2$ なら負の固有値は無限個あることになります．実はこのことは $\hbar$ が小さくなくても正しいのです．

定理 4.1　$-\Delta+V(x)$ を $\boldsymbol{R}^3$ で考える．

（1）　ある定数 $C>0$ と $\alpha>2$ に対して $V(x)\geq -C(1+|x|)^{-\alpha}$ なら，$-\Delta+V(x)$ の負の固有値は重複度もこめて有限である．

（2）　ある定数 $C>0$ と $0<\alpha<2$ に対して $V(x)\leq -C(1+|x|)^{-\alpha}$ なら，$-\Delta+V(x)$ の負の固有値は無限個ある．

固有値の個数を評価する不等式として，次のものがあります．

定理 4.2　$\boldsymbol{R}^3$ における $-\Delta+V(x)$ の負の固有値の個数を $N(V)$ とすれば，

$$N(V) \leq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2\iint_{R^3}\frac{|V(x)V(y)|}{|x-y|^2}dx\,dy.$$

5° 粒子は時間と共にどう動くか？

電子の運動の時間的変化を追跡しようとするときには，次の方程式を考えます．

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t) = Hu(t), \qquad u(0)=\varphi. \tag{5.1}$$

ここで，$H=-\Delta+V(x)$ です．この方程式の解を $u(t)=e^{-itH}\varphi$ と書きます．行列の指数関数を思い出せば，この記号が自然なものであることがわかります．

初期値 φ が H の固有値 λ に対する固有ベクトルであったとしましょう．$H\varphi=\lambda\varphi$ です．このとき $u(t)=e^{-it\lambda}\varphi$ となります．$e^{-it\lambda}\varphi$ が上の方程式をみたしていることを確かめてみてください．したがって，$u(t)$ は時間に関して周期的に変化するだけです．

H の固有値全体を $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$ としましょう．各固有値 λ_i に対する固有空間の中に正規直交基底 $\varphi_1^{(i)},\varphi_2^{(i)},\cdots$ をとります．こうして得られた $\varphi_1^{(1)},\varphi_2^{(1)},\cdots,\varphi_1^{(2)},\varphi_2^{(2)},\cdots$ の番号をつけかえて，$\psi_1,\psi_2,\cdots$ としましょう．そして

$$\mathscr{H}_{pp}(H)=\{\sum_i c_i\psi_i\,;\ \sum_i|c_i|^2<\infty\} \tag{5.2}$$

とおきます．これを H に対する**点スペクトルの空間**と呼びましょう．pp は pure point の略です．$\mathscr{H}_{pp}(H)$ に属するベクトルは，時間がたってもあまり遠くまで動かないことがわかります．次の定理が成り立ちます．

定理 5.1　$u\in\mathscr{H}_{pp}(H)$ であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $R>0$ が存在し

$$\int_{|x|>R}|(e^{-itH}u)(x)|^2dx<\varepsilon \tag{5.3}$$

がすべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して成り立つことである．

$\boldsymbol{R}^3$ の領域 D に対して

$$\int_D|(e^{-itH}u)(x)|^2dx$$

は電子が時刻 t において領域 D に存在する確率を表します．（ただし，$\int_{\boldsymbol{R}^3}|u(x)|^2dx=1$ としておきます．このとき，すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\int_{\boldsymbol{R}^3}|(e^{-itH}u)(x)|^2dx=1$ となります．）上の定理は電子が $\{|x|>R\}$ に存在する確率が時間に無関係に ε より小さいというのですから，これは電子が原子核に束縛されている様子を表しています．

$\mathscr{H}_{pp}(H)$ の直交補空間を $\mathscr{H}_{cont}(H)$ としましょう．つまり

$$L^2(\boldsymbol{R}^3) = \mathscr{H}_{pp}(H) \oplus \mathscr{H}_{cont}(H) \qquad (5.4)$$

と直交分解するのです．*cont* は continuous spectrum，すなわち連続スペクトルに対する部分空間というつもりです．次の定理が成り立ちます．

定理 5.2　$u \in \mathscr{H}_{cont}(H)$ となるための必要十分条件は，任意の $R > 0$ に対して

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_{|x|<R} |(e^{-itH}u)(x)|^2 dx = 0 \qquad (5.5)$$

となることである．

この定理の意味するのは次のようなことです．たとえば，連続関数 $f(t)$ が $f(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ をみたせば，$\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt \to 0$ $(T \to \infty)$ となります．したがって，$e^{-itH}u$ が (5.5) のような性質をもてば，$\displaystyle\int_{|x|<R} |(e^{-itH}u)(x)|^2 dx$ は時間がたつと 0 になると考えてよいでしょう．つまり，半径 R の球の中に電子の存在する確率が小さくなるのですから，電子は時間がたつと次第に遠くにとんでいくと考えてよいでしょう．このような運動をする粒子を**散乱状態**にあるといいます．

ところで，上で連続スペクトルという言葉が出てきました．第3節では本質的スペクトルという言葉を使いました．この両者は同じとは限らないのですが，いまのように $H = -\Delta + V(x)$ で $V(x) \to 0$ $(|x| \to \infty)$ となっているときには同じものになります．スペクトルを分類するには直感的な表現だけではうまくいかないので，数学でいう測度の理論を使います．

6° 2体問題における散乱

$L^2(\boldsymbol{R}^\nu)$ で $H=-\Delta+V(x)$ を考えます．ν は何でもいいのですが，$\nu=3$ を想像してみてください．$V(x)$ は実数値関数で $V(x)=O(|x|^{-1-\varepsilon})$ $(|x|\to\infty)$ となるものとしましょう．$\varepsilon>0$ は定数です．前節でお話ししたように $\varphi\in\mathscr{H}_{cont}(H)$ ならば $e^{-itH}\varphi$ は時間がたつと次第に遠くへとんでいきます．いまの場合には，もっとはっきりと

$$\int_{|x|<R}|(e^{-itH}\varphi)(x)|^2dx \to 0 \qquad (t\to\pm\infty) \tag{6.1}$$

がどんな $R>0$ に対しても成り立つことがわかります．ところで，$V(x)$ は $|x|$ が大きいときにはほぼ 0 になるのですから，$e^{-itH}\varphi$ は時間がたつと $H_0=-\Delta$ のみに影響されて運動すると考えてよいでしょう．このことを数式で書くと，次のようになります．ある $\varphi_\pm\in L^2(\boldsymbol{R}^\nu)$ に対して

$$\|e^{-itH}\varphi-e^{-itH_0}\varphi_\pm\|_{L^2(\boldsymbol{R}^\nu)} \to 0 \qquad (t\to\pm\infty) \tag{6.2}$$

となる．

また，物理の言葉でいうと次のようになります．ある場の中を運動する粒子があるとしよう．（いまの場合には，重い原子核がそばの電子に電気的な力を及ぼしている．その力の場がポテンシアル $V(x)$ によって与えられている，ということになります．）その粒子はある程度高い運動エネルギーをもっているので，その場の影響から逃れて遠くにとんでいこうとする．遠くに行けば力の場の影響はなくなり，粒子は自由粒子として運動する．その自由粒子を記述するエネルギー作用素は $H_0=-\Delta$ である．

この一見自然なことが，本当にそうなっているということを確かめるのはあまりやさしいことではないのです．そして，このことを説明しようというのが**散乱理論**と呼ばれる数理物理学の分野の大きな目標のひとつです．実際このことをめぐっていろいろな興味深い考え方や数学のテクニックが発達してきたのです．ここでは，1970年代の後半に，Volker Enss（フォルカー・

エンス）が発見した方法を紹介しましょう．この方法は，粒子が運動する直観的イメージと数学的解析とがよく結びついていて，散乱現象のもつ物理的意味をよく感じさせてくれます．Enss 自身の考え方も少しずつ変わっていったのですが，その中で最も印象深い部分をお話ししましょう．

まず，古典力学における運動を想像しましょう．いま考えている問題を古典力学的にみれば，運動方程式は

$$\frac{d}{dt}q(t) = 2p(t), \qquad \frac{d}{dt}p(t) = -(\nabla_q V)(q(t))$$

となります．$V(x) = 0$ のときには $p(t) = \text{定数} = p_0$, $q(t) = 2p_0t + q_0$ となります．$V(x)$ が $V(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ をみたすときには，もし $q(t)$ が $t \to \infty$ で遠くにとんでいくような解であれば

$$\frac{q(t)}{2t} - p(t) \to 0, \qquad p(t) \to p_\infty = \text{定数} \qquad (t \to \infty)$$

となることがわかります．このことの量子力学的アナロジーを考えようというのが肝心なところなのです．

話をわかりやすくするために，空間次元を1としましょう．古典力学で位置，運動量と呼んだものの量子力学的アナロジーは，空間変数 x を掛けるという掛け算作用素 q と $p = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ という微分作用素です．次の式はぜひ計算してください．

$$i[p, q] = i(pq - qp) = 1 \tag{6.3}$$

これを**正準交換関係**（Canonical Commutation Relation）というのでした．いま考えている粒子のエネルギーを与える作用素は $-\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$ ですから，これは $p^2 + V(q)$ と書くことができます．これは作用素 p, q の関数です．このように p や q は量子力学を組み立てるための部品のようなものです．古典力学では p や q は普通の数でした．量子力学では p や q は作用素です．交換関係（6.3）はよく知られたものですが，Enss はそれが量子力学的な粒子の運動を目に見えるように解析するのに重要な役割を果たすことを見いだし

たのです.

以下，計算してみてください．$H_0=p^2$ です．$A=(pq+qp)/2$ とおきましょう．まず，(6.3) から

$$i[H_0, q^2] = 4A, \qquad i[H_0, A] = 2H_0$$

が成り立ちます．これより

$$\frac{d}{dt}(e^{itH_0}q^2e^{-itH_0}) = 4e^{itH_0}Ae^{-itH_0}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{itH_0}Ae^{-itH_0}) = 2H_0$$

となります．これを積分することにより

$$e^{itH_0}Ae^{-itH_0} = 2tH_0 + A$$

$$e^{itH_0}q^2e^{-itH_0} = 4t^2H_0 + 4tA + q^2$$

となります．したがって，

$$e^{itH_0}\left(\frac{q}{2t}-p\right)^2e^{-itH_0} = \frac{q^2}{4t^2}$$

となりました．これより

$$\left\|\left(\frac{q}{2t}-p\right)^2e^{-itH_0}\varphi\right\|^2 = \frac{1}{4t^2}\|q\varphi\|^2 \to 0 \qquad (t\to\infty)$$

が成り立ちます．このように自由に運動する粒子に対しては，その運動量 p はほぼ $q/(2t)$ に等しくなることがわかります．同じように，ポテンシアル $V(x)$ があっても $\varphi\in\mathscr{H}_{cont}(H)$ なら（一般化された意味で）

$$\left\|\left(\frac{q}{2t}-p\right)^2e^{-itH}\varphi\right\|^2 \to 0 \qquad (t\to\infty)$$

となることがわかるというのが Enss の主張です．

このように，散乱状態にある量子力学的粒子は長時間たちますとほぼ古典力学における軌道に沿って運動しているのです．実はこのこと自身はもっと高度な数学的道具を用いて，より一般な作用素に対しても精密に証明できます．しかし，このように交換関係だけに基づいて粒子の軌道が計算され，し

かもそれによってもともとの問題 (6.2) が解決されるというのは実に鮮やかなアイディアではないでしょうか？ 量子力学はまさに交換関係のたまものです.

7° S 行列

ここでは3次元で考えましょう. 前節で, $\varphi \in \mathscr{H}_{cont}(H)$ に対して $\varphi_\pm \in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ が存在し

$$\| e^{-itH}\varphi - e^{-itH_0}\varphi_\pm \|_{L^2(\boldsymbol{R}^3)} \to 0 \qquad (t \to \pm\infty)$$

となることをお話ししました. これは, 散乱状態にある解 $e^{-itH}\varphi$ は $t \to -\infty$ ではある自由粒子 $e^{-itH_0}\varphi_-$ に等しく $t \to \infty$ では別の自由粒子 $e^{-itH_0}\varphi_+$ に等しいことを意味します. このことを次のように考えましょう.

遠い過去において（日常的感覚では一瞬前, 10のマイナス何乗秒前ということなのですが）自由粒子 $e^{-itH_0}\varphi_-$ としてとんでいた粒子が原子核に近づいてきた. そして, ポテンシアルの影響をうけて運動の様子が変わった. 十分時間がたつと（実際には一瞬後に）原子核から遠く離れて自由粒子 $e^{-itH_0}\varphi_+$ としてとんでいる.

これは標的に粒子を衝突させて散乱される様子を調べようとする散乱の実験の様子とよく合致しています. そこで, 過去における状態 φ_- に未来における状態 φ_+ を対応させる作用素

$$S : \varphi_- \to \varphi_+ \tag{7.1}$$

を考え, 散乱作用素と呼びましょう. これは $L^2(\boldsymbol{R}^3)$ 上のユニタリ作用素になります. この作用素の様子はフーリエ (Fourier) 変換を用いるとわかりやすくなります. $\boldsymbol{R}^3$ 上の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ とは

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-3/2}\int_{\boldsymbol{R}^3} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx \tag{7.2}$$

で定義されるものでした. φ_+, φ_- のフーリエ変換を $\hat{\varphi}_+(\xi)$, $\hat{\varphi}_-(\xi)$ としましょ

う．さらに $|\xi|=k$ とおけば，$\hat{\varphi}_+(k\omega)$ は $\hat{\varphi}_-(k\omega)$ を用いて次のように表されることがわかっています．

$$\hat{\varphi}_+(k\theta) = \hat{\varphi}_-(k\theta) - \frac{k}{2\pi i}\int_{S^2} f(k^2;\theta,\omega)\,\hat{\varphi}_-(k\omega)\,d\omega. \tag{7.3}$$

ここで，$f(k^2;\theta,\omega)$ は $\varphi_\pm$ とは無関係に定まるある関数です．これを散乱振幅といいます．この（7.3）式の右辺をよく見ますと，k というパラメーターはそのままにして球面上の変数 $\omega\in S^2$ だけで積分しています．これは自然なことなのです．k^2 を E とおきますと，E は入射する粒子のエネルギーを表します．$\hat{\varphi}_-(\sqrt{E}\omega)$ の ω は入射する粒子の方向，$\hat{\varphi}_+(\sqrt{E}\theta)$ の θ は散乱する粒子の方向を表します．（7.3）の右辺と左辺の k が同じということは，粒子が散乱してもエネルギーは保存されるということです．（7.3）の右辺第 2 項は，ポテンシアルの影響によって散乱粒子が入射粒子とどれだけ違っているかということを表しています．特に $|f(E;\theta,\omega)|^2$ は微分散乱断面積と呼ばれ，ω 方向からやってきた粒子が θ 方向に散乱される割合を表します．ω 方向から 1 秒間に 1 個ずつ粒子がとんできたとしますと，θ 方向には 1 秒間に $|f(E;\theta,\omega)|^2$ 個の粒子が散乱されるということになります．

また，$L^2(S^2)$ 上の作用素 $\hat{S}(E)$ を

$$(\hat{S}(E)\varphi)(\theta) = \varphi(\theta) - \frac{\sqrt{E}}{2\pi i}\int_{S^2} f(E;\theta,\omega)\varphi(\omega)\,d\omega \tag{7.4}$$

によって定義すれば，（7.3）は

$$\hat{\varphi}_+(\sqrt{E}\,\theta) = (\hat{S}(E)\varphi_-(\sqrt{E}\,\cdot))(\theta) \tag{7.5}$$

と書けます．ここで，$\hat{S}(E)\varphi_-(\sqrt{E}\,\cdot)$ は $\hat{\varphi}_-(\sqrt{E}\,\omega)$ を ω のみの関数とみなして作用素 $\hat{S}(E)$ をほどこすという意味です．この作用素 $\hat{S}(E)$ を **S 行列**といいます．

S 行列を最初に導入したのは Wheeler（ホイーラー）という人ですが，Heisenberg（ハイゼンベルグ）は素粒子論の基礎づけに S 行列を使いました．S 行列は観測と直接に結びつくものです．Heisenberg は直接観測に関係す

るものをもとにして素粒子論を築こうと考えたのです．シュレーディンガー方程式に対しても S 行列は大事な役割を果たしています．特に重要と思われるのは

S 行列から $V(x)$ を求めよ

という逆問題です．これは非常に興味深い問題なのですが，残念ながらここではこれ以上お話しできません．

上では時間に依存する方法で S 行列を導入しましたが，時間によらない方法もあります．こちらの方が物理ではおなじみかもしれません．まず $E>0$ をエネルギーとして，シュレーディンガー方程式

$$(-\Delta + V(x) - E)\varphi = 0 \tag{7.6}$$

を考えます．$V(x)=0$ のときは $e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x}$ $(\omega \in S^2)$ が解になります．これは自由粒子がエネルギー E をもって運動している状態に相当します．そこで，$v=\varphi-e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x}$ とおきますと

$$(-\Delta + V(x) - E)v = -V(x)e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x} \tag{7.7}$$

となります．この方程式は無数に解をもちますが，

$$v = O\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial r} - i\sqrt{E}\right)v = o\left(\frac{1}{r}\right), \qquad r = |x| \to \infty \tag{7.8}$$

という無限遠に与えた境界条件の下では解は一つだけであることがわかります．条件 (7.8) を**ゾンマーフェルト** (Sommerfeld) **の放射条件**といいます．その解 v に対して $\varphi=e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x}+v$ とおけば，$\varphi(x)$ は

$$\varphi(x) \sim e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x} + \frac{e^{i\sqrt{E}r}}{r}f(E;\theta,\omega), \qquad r=|x|\to\infty, \quad \theta = \frac{x}{r} \tag{7.9}$$

という形に展開されます．$f(E;\theta,\omega)$ は先ほどの散乱振幅です．このようにして，時間によらないシュレーディンガー方程式 (7.6) を解いても S 行列が得られます．

8° 多電子原子

8.1 多電子原子のスペクトル

水素型原子に対するシュレーディンガー作用素は

$$H = -\Delta - \frac{Z}{|x|} \tag{8.1}$$

という形でした．ここで，$x = (x^1, x^2, x^3) \in \boldsymbol{R}^3$ で $\Delta = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^2$，また Z は正の定数で原子核の電荷を表します．これは原子核のまわりに1個の電子がある原子に対するハミルトニアンです．このとき $[0, \infty)$ は H の連続スペクトルで，0から下に固有値がポツポツと出てくるのでした．電子を N 個もつ原子に対するハミルトニアンは

$$H(Z, N) = \sum_{i=1}^{N}\left(-\Delta_i - \frac{Z}{|x_i|}\right) + \sum_{1\leq i<j\leq N} \frac{1}{|x_i - x_j|} \tag{8.2}$$

という形をしています．ここで，$x_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3) \in \boldsymbol{R}^3$ は i 番目の電子の座標を表し $\Delta_i = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^j}\right)^2$ です．これに合わせて (8.1) の作用素を $H(Z, 1)$ と書きましょう．$H(Z, N)$ のスペクトルは多電子原子のとりうるエネルギー状態を表していますから，私たちの身の回りの物質と深い関係があります．

$$E_N = \inf \sigma(H(Z, N)) \tag{8.3}$$

とおきましょう．E_N は N 個の電子をもち，原子核の電荷が Z である原子のとりうる最低のエネルギーです．たとえば，$E_1 = -Z^2/4$ です．一般に

$$E_1 \geq E_2 \geq \cdots \geq E_N \geq \cdots \tag{8.4}$$

となります．つまり，原子核の電荷 Z を一定にしておいて電子を1個ずつ増やしていきますと，最低エネルギーはだんだん下がっていきます．

スペクトルはどうなるのでしょう．$\sigma_e(H(Z, N))$ を $H(Z, N)$ の本質的スペクトル（この場合には連続スペクトルと同じ），$\sigma_d(H(Z, N))$ を $H(Z, N)$ の離散スペクトルとしますと，$N \geq 2$ のとき

$$\sigma_e(H(Z,N)) = [E_{N-1}, \infty) \tag{8.5}$$

$$\sigma_d(H(Z,N)) \subset (-\infty, E_{N-1}) \tag{8.6}$$

となります．(8.5) は次のように考えれば納得できます．たとえば $N=2$ としましょう．これはヘリウムの原子です．この原子が連続スペクトルに対応する状態にあったとしますと，2個の電子のどちらか一方は遠くにとんでいきます．二つとも遠くにいけばそれらのエネルギーは運動エネルギーで0以上ですから，全体のエネルギーは0以上．1個の電子が束縛状態にあり，残りの1個の電子が散乱状態にあったとしますと，全体のエネルギーは

$H(Z,1)$ の固有値 ＋ 自由電子の0以上の運動エネルギー

となります．この形のエネルギーの最小値は E_1 です．したがって，ヘリウム原子の連続スペクトルに対するエネルギーの最小値は E_1 となります．これが (8.5) の意味です．

水素原子は負の固有値を無限個もっています．一般の多電子原子の離散スペクトルはどれくらいあるのでしょう．これについては次のことがわかっています．

$Z > N-1$ なら $\sigma_d(H(Z,N))$ は無限個ある．

$Z \leq N-1$ なら $\sigma_d(H(Z,N))$ は高々有限個しかない．

電子数 N が大きくなるにつれて多電子原子の束縛状態の個数は減っていきます．特に N が非常に大きくなれば，この原子は束縛状態をもたなくなります．これは，非常に大きく負に帯電したイオンは存在しないということです．原子核が最大限束縛できる電子の個数を $N_{max}(Z)$ としますと，

$$N_{max}(Z) < 2Z+1$$

となることがわかっています．

8.2　物質の安定性

物質の性質を考える上で重要な働きをするのがスピンと統計です．スピンとは，簡単にいえば，粒子を表す波動関数が多成分のベクトル値（より正確

にはスピノール値）関数になっているということなのですが，ここでは考えないことにしましょう．統計とは次のようなことです．N 個の粒子からなる系があるとしましょう．各粒子の座標を $x_1, \cdots, x_N \in \boldsymbol{R}^3$ とします．この系に対する波動関数は N 変数 $x_1, \cdots, x_N$ の関数 $\psi(x_1, \cdots, x_N)$ です．この系が**フェルミオン**であるとは

$$\psi(\cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots) = -\psi(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots)$$

であること．つまり，任意の二つの粒子の座標を入れ替えるとマイナス「−」がつくことです．この系が**ボゾン**であるとは

$$\psi(\cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots) = \psi(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots)$$

であること．つまり，任意の二つの粒子の座標を入れ替えても波動関数が変わらないことです．フェルミオンを扱うときには，問題にしているシュレーディンガー作用素（たとえば $H(Z, N)$）を上のような反対称な関数のなすヒルベルト空間で考え，ボゾンを扱うときには対称な関数のなすヒルベルト空間で考えます．直感的にはわかりにくいのですが，この統計性は物質の安定性に深いかかわりをもっています．

正の電荷 Z をもった原子核が k 個あり，そのまわりに負の単位電荷をもった粒子が N 個あるとします．$N = kZ$ としましょう．このとき全体の系は電気的に中性です．この系の最低エネルギーを E_N としますと，N が大きいとき

$$E_N \simeq -CN^{\alpha} \tag{8.7}$$

となります．ここで，粒子がフェルミオンなら $\alpha = 1$，ボゾンなら $\alpha = 7/5$ となります．

(8.7) が物質の安定性とどう関係するのでしょう．もし $\alpha > 1$ なら (8.7) から $E_{2N} < E_N + E_N$ となります．これは次のことを意味します：N 個の粒子からなる物質が二つあるとする．この二つの物質は合体した方がエネルギーが低くなり安定である．つまり，このような物質は雪だるまのようにどんどんお互いにくっついていく方が安定なのです．もし $\alpha < 1$ なら $E_{2N} > E_N + E_N$ です．このような物質はどんどん分裂した方が安定になります．もし地球が

このような物質でできていたら，どんなことになるでしょう？ 電子は幸いなことにフェルミオンで，上の式で $\alpha = 1$ の場合です．私たちのまわりの物質は原子核と電子でできています．物質が安定でいられるのは電子がフェルミ統計に従っているというのが理由だったとは意外ですね．

上の説明は，話をわかりやすくするために少し不正確になっています．より詳しくは，E. H. Lieb の論文

The stability of matter : From atoms to stars, *Bull. Amer. Math. Soc.* **22** (1990), 1 − 49

を読んでみてください．これは原子，分子から白色矮星に至るまで量子力学の立場から物質の安定性を論じたとても興味深い解説です．

9° 多体系の時間発展

9.1　重心座標の分離

さて，いよいよ多体問題に入りましょう．$\boldsymbol{R}^3$ の中に N 個の粒子があるとし，それらの座標を $q_1, \cdots, q_N$, 質量を $m_1, \cdots, m_N$ とします．この多体系に対するシュレーディンガー作用素は

$$\widetilde{H} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i} \Delta_{q_i} + \sum_{1 \le i < j \le N} V_{ij}(q_j - q_i) \tag{9.1}$$

という形をしています．ここで，$q_i = (q_i^1, q_i^2, q_i^3)$ に対して $\Delta_{q_i} = \sum_{j=1}^{3} \left(\dfrac{\partial}{\partial q_i^j} \right)^2$ であり，$V_{ij}(y)$ は $\boldsymbol{R}^3$ で定義された実数値関数で $V_{ij}(q_j - q_i)$ は粒子 i, j の間の相互作用を与えるポテンシアルです．最初にすべきことは，座標系をとり替えて $\widetilde{H}$ から本質的な部分を取り出すことです．

手はじめに，$N = 2$ の場合を考えましょう．次のような座標系をとります．

$$x_1 = q_2 - q_1, \qquad y_{12} = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} \tag{9.2}$$

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \qquad M_{12} = m_1 + m_2 \tag{9.3}$$

x_1 は粒子1，2の相対的位置を表す座標で，y_{12} は粒子1，2の重心の座標です．このとき

$$\frac{1}{m_1}\Delta_{q_1} + \frac{1}{m_2}\Delta_{q_2} = \frac{1}{\mu_1}\Delta_{x_1} + \frac{1}{M_{12}}\Delta_{y_{12}} \tag{9.4}$$

となることがわかります．すると，もとのシュレーディンガー作用素は

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2\mu_1}\Delta_{x_1} + V_{12}(x_1) - \frac{1}{2M_{12}}\Delta_{y_{12}}$$

となります．右辺は相対的な位置変数 x_1 に対する作用素 $-\frac{1}{2\mu_1}\Delta_{x_1} + V_{12}(x_1)$ と重心座標 y_{12} に関する作用素 $-\frac{1}{2M_{12}}\Delta_{y_{12}}$ の二つに分離されています．そこで，重心座標の方は忘れて，$-\frac{1}{2\mu_1}\Delta_{x_1} + V_{12}(x_1)$ のみを考えることにします．これは古典力学の例でいえば，次のようになります．2個の質点がお互いの引力のみによって相互に作用しながら動いているときには，重心は等速直線運動をします．そこで重心の運動は無視して，二つの質点の相対的な位置の変化のみを見ようという考え方です．

$N=3$ のときは，粒子1，2の質量中心と粒子3に対して上と同じ操作をします．つまり，

$$x_2 = q_3 - y_{12}, \qquad y_{123} = \frac{M_{12}y_{12} + m_3q_3}{M_{12} + m_3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i q_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} \tag{9.5}$$

$$\frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{M_{12}} + \frac{1}{m_3}, \qquad M_{123} = M_{12} + m_3 = \sum_{i=1}^{3} m_i \tag{9.6}$$

とおきますと，

$$\frac{1}{M_{12}}\Delta_{y_{12}} + \frac{1}{m_3}\Delta_{q_3} = \frac{1}{\mu_2}\Delta_{x_2} + \frac{1}{M_{123}}\Delta_{y_{123}}$$

となります．また，

$$q_3 - q_2 = q_3 - y_{12} + y_{12} - q_2 = x_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}x_1$$

$$q_3 - q_1 = q_3 - q_2 + q_2 - q_1 = x_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}x_1$$

となりますから，

$$\widetilde{H} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2\mu_i}\Delta_{x_i} + \sum_{1\le i<j\le 3} V_{ij}(q_j - q_i) - \frac{1}{2M_{123}}\Delta_{y_{123}}$$

となり，重心座標が分離されました．

$N \ge 4$ の場合も上と同じように1個ずつ粒子を増やしていけばよいのです．

$$x_j = q_{j+1} - \frac{\sum_{i=1}^{j} m_i q_i}{\sum_{i=1}^{j} m_i}, \qquad x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i q_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{9.7}$$

$$\frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{m_{j+1}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{j} m_i}, \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{9.8}$$

とおきますと，

$$\widetilde{H} = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2\mu_i}\Delta_{x_i} + \sum_{1\le i<j\le N} V_{ij}(q_j - q_i) - \frac{1}{2M}\Delta_{x_c}$$

となり，また $q_j - q_i$ は $x_1, \cdots, x_{N-1}$ の一次結合で書けることがわかりますので，重心座標 x_c に関する部分を取り除き

$$H = H_0 + \sum_{1\le i<j\le N} V_{ij}(q_j - q_i) \tag{9.9}$$

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2\mu_i}\Delta_{x_i} \tag{9.10}$$

を考えようというのです．(9.7) のような座標を**ヤコビ** (Jacobi) **座標系**といいます．

9.2　クラスター分解

多粒子系が散乱状態にあるというのは，時間がたつにつれて系全体が次第に拡がっていくということなのですが，その拡がり方にはいろいろなパターンがあります．すべての粒子がお互いに離ればなれになることもあるでしょうし，いくつかの小グループを作りながらお互いに離れていくということも

あるでしょう．このようなことを書き表すためにクラスター分解というものを考えます．クラスター（cluster）とは，かたまりとか集団という意味です．

$\{1, 2, \cdots, N\}$ をいくつかの小集団に分けましょう．たとえば，$\{1, 2, \cdots, 6\}$ を $\{(1, 3), (2, 5, 6), (4)\}$ に分けるというようなことです．これを $a = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ と書いて，$\{1, 2, \cdots, N\}$ の**クラスター分解**といいます．各 C_i を**クラスター**と呼びましょう．各クラスターをひとつの粒子系とみなし，これらの系が相互に作用せずに運動している状況を考えたいのです．そのために，(9.9) からクラスター間にまたがる相互作用を取り除いたものを考え，それを H_a とおきます．たとえば，$a = \{(1, 3), (2, 5, 6), (4)\}$ のときには

$$H_a = H_0 + V_{13} + V_{25} + V_{26} + V_{56}$$

となります．

次に，各 C_i に注目しましょう．この C_i に含まれている粒子のみに注目して 9.1 と同じ操作をします．すなわち，ヤコビ座標系を導入して C_i の質量中心を除きます．そうして得られた作用素を $H(C_i)$ と書きましょう．$H(C_i)$ はクラスター C_i の内部エネルギーを表す作用素です．そして

$$H^a = \sum_{i=1}^{k} H(C_i) \tag{9.11}$$

とおきます．

次に，各 C_i の質量中心 $y_i = \sum_{j \in C_i} \dfrac{m_j q_j}{M_i}$, $M_i = \sum_{j \in C_i} m_j$, から得られる運動エネルギー作用素をすべて集めます：$-\sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{2M_i} \Delta_{y_i}$．そして，$y_1, \cdots, y_k$ をあたかも粒子の座標のように考えて，9.1 と同じようにヤコビ座標系 $x_{a1}, x_{a2}, \cdots$ を作ります．すると，これらの質量中心たちの質量中心はもとの N 体系の質量中心 $x_c = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{m_i q_i}{M}$, $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$, となりますから，

$$-\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2M_i} \Delta_{y_i} = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2n_i} \Delta_{x_{ai}} - \frac{1}{2M} \Delta_{x_c}$$

となります．そこで，

$$T_a = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2n_i} \Delta_{x_{ai}} \tag{9.12}$$

とおけば，最終的に

$$H_a = H^a + T_a \tag{9.13}$$

となります．ここで，H^a は各クラスターの内部エネルギーを表す作用素の和で，T_a は各クラスターの重心のもつ運動エネルギー作用素です．

9.3　スペクトルの構造

上で述べたことはかなりこみいっていますが，多体系の性質をよく反映しています．クラスター分解 $a = \{C_1, \cdots, C_k\}$ に対して，$^{\#}a = k$ とおきましょう．H_a は $^{\#}a$ 個のクラスターが相互作用せず，クラスター内のみに相互作用があるという状況に対するエネルギー作用素です．$^{\#}a \geq 2$ のときは

$$\sigma(H_a) = [\Sigma_a, \infty), \qquad \Sigma_a = \sum_{i=1}^{\#a} \inf \sigma(H(C_i)) \tag{9.14}$$

となります．これは各クラスターのエネルギーがいちばん低い状態を考えればわかるでしょう．もともとの H の本質的スペクトルは次のようになります．

$$\sigma_e(H) = [\Sigma, \infty), \qquad \Sigma = \inf_{\#a \geq 2} \Sigma_a \tag{9.15}$$

これは次のように考えれば納得できるでしょう．

『H の散乱状態は，全体の粒子がいくつかのクラスターに分かれ，
各クラスターが相互に離れていくような運動をする．』

したがって，各クラスターが十分に離れればクラスター間の相互作用はなくなりますから，全体としては H_a という作用素によってエネルギーが与えられると思ってよいでしょう．そこで，H_a のとりうるエネルギーのいちばん低い状態が H の散乱状態の最低エネルギーを与えることになります．それが (9.15) 式です．

9.4 波動作用素の漸近完全性

上の『…』で述べたことが，まさにこの解説でお話ししたいことなのです．もう少し詳しく述べましょう．クラスター分解 $a=\{C_1, \cdots, C_k\}$ を一つとります．$H(C_i)$ の固有値 $\lambda_{p_j}^{(i)}$ と対応する固有ベクトル $\phi_{p_j}^{(i)}(x_i)$ を一つとります．x_i はクラスター C_i の内部座標です．各クラスターの質量中心から得られるヤコビ座標系を $y_1, \cdots, y_{k-1}$ としましょう．このとき，u が H の散乱状態に対応するベクトル（$u\in\mathscr{H}_{cont}(H)$）であれば，あるベクトル $u_{p_1\cdots p_k}(y_1, \cdots, y_{k-1})$ が存在し，$t\to\infty$ のとき

$$\|e^{-itH}u-\sum_{{}^{\#}a\geq 2}\sum e^{-itE}\phi_{p_1}^{(1)}(x_1)\cdots\phi_{p_k}^{(k)}(x_k)(e^{-itT_a}u_{p_1\cdots p_k})(y_1, \cdots, y_{k-1})\|\to 0 \tag{9.16}$$

$$E=\lambda_{p_1}^{(1)}+\cdots+\lambda_{p_k}^{(k)}$$

となる，というのが正確な主張です．ここで，最初の総和記号 $\sum_{{}^{\#}a\geq 2}$ は ${}^{\#}a\geq 2$ となるクラスター分解すべてに関する和で，次の総和記号はクラスター分解 a を固定した上でのすべての固有値，固有ベクトルに関する和です．

（9.16）の式は各クラスター C_i が束縛状態にあり，各クラスターの重心が相互に作用せずに自由運動している様子を表しています．この主張のことを**波動作用素の漸近完全性**（Asymptotic completeness of wave operators）といいます．より正確には，（9.16）は波動作用素の漸近完全性と同値な主張です．波動作用素の定義などはここでは省略しましょう．

物理的にはごく当然に見えるこの主張を証明するのが長い間の懸案でした．この証明を試みるなかで多くの数学的事実が明らかになってきたのです．この問題の解決に最初に成功したのが L. D. Faddeev でした．1960年代初めのことです．彼は3体問題の場合に連続スペクトルに対応する一般化された固有関数の完全系を構成して，上のことを証明しました．その方法の鍵となったのが3体問題に特有のレゾルベント方程式だったのですが，その方法は4体以上に拡張することは難しく，また2体の部分系のスペクトルの性質にある種の仮定をおいていました．その後，多体系の散乱問題の研究は停滞していた

のですが，1980年代になって V. Enss によるユニタリグループ e^{-itH} を直接解析する方法が進展して，大きな進歩が得られました．Enss は3体問題の場合にクーロンポテンシアルまでこめて一般的に上の問題を解決しました．それは明解な物理的アイディアに富む方法で4体以上の場合にも多くの部分が拡張可能だったのですが，N 体の完全な解決には至りませんでした．N 体問題の完全な解決を与えたのが Sigal-Soffer による1987年の論文です．この論文はユニタリグループの評価の仕方と後に述べる E. Mourre による作用素の交換子の方法とを結びつけたものですが，かなり難解でした．もっとわかりやすい別証明を与えたのが G. M. Graf による1990年の論文で，これは各粒子の時間的挙動を明解に見せていましたので，この方向が多体系を考えるときの主流となっていきました．

多体問題の漸近完全性の証明の技術的な部分は数学としてみても大変興味深いものですが，ここでは詳しくお話しする余裕がありません．入り口のところだけほんの少しお話ししましょう．

$H_0 = -\Delta$，$p = -i\nabla$，$A = (x\cdot p + p\cdot x)/2$ とおきますと，

$$\frac{d}{dt}\left[e^{itH_0}\left(\frac{A}{t} - \frac{|x|^2}{4t^2}\right)e^{-itH_0}\right] = e^{itH_0}\frac{2}{t}\left(\frac{x}{2t} - p\right)^2 e^{-itH_0}$$

となります．このことから，u が適当な条件をみたせば

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\left\|\left(\frac{x}{2t} - p\right)^2 e^{-itH_0}u\right\|^2 dt < \infty \tag{9.17}$$

となります．これは自由粒子 $e^{-itH_0}u$ が $p = x/(2t)$ という古典力学の軌道に沿って動いていることを意味します．多体系の散乱問題の研究は，(9.17) のような形の評価式をいかにして多体シュレーディンガー作用素に拡張するか，ということを中心にして動いてきたといっても過言ではありません．

もう一つ忘れてならない重要な仕事は，E. Mourre による1981年の論文です．これは二つの作用素（上の例でいえば H_0 と A）の交換子を考えることによってレゾルベントの評価を求めるものですが，多体問題の中心的な手段

となったのみならず，その抽象的な性格からスペクトル理論に関係した多くの問題に適用されています．これらのことを見ると交換関係は量子力学に原理的に深く根を下ろしているのだということにあらためて気がつかされます．

10° 多体系の S 行列

ご承知のとおり量子力学においては不確定性原理がありますので，古典力学のときのような粒子の相空間における軌道という概念はありません．それどころか個々の粒子の行動を予言することもできません．散乱という現象において，実際に観測されるのは散乱断面積だけです．こうした理由から，S 行列の計算は散乱現象の解析において中心的な役割をもつといってよいでしょう．この節では，多体系の S 行列について知られていることを少しお話ししましょう．ただし，詳しい数式は省略しますので，興味のある方はサマースクールの講演原稿をご覧になってください．

10.1　多体シュレーディンガー方程式に対する放射条件

S 行列を表す式を作ってみますと，その中に時間によらないシュレーディンガー方程式

$$\left(-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{2m_i}\Delta_{x_i}+\sum_{1\leq i<j\leq N}V_{ij}-E\right)u = f \tag{10.1}$$

の解が現れます．多体問題の S 行列が難しいのは，この方程式（10.1）が具体的には解けないこと，さらに解の性質もよくわからないことなどが原因です．波動作用素の漸近完全性は e^{-itH} を解析するという手法で証明されましたが，S 行列に対する深い理解を得るためには方程式（10.1）を深く解析する必要があるように思います．

2 体問題のときに，シュレーディンガー方程式（10.1）に対しては（7.8）のゾンマーフェルトの放射条件を仮定すると，解は一つだけであることをお話

ししました．この条件は，2体問題のときには（10.1）の解の形として $e^{i\sqrt{E}r}/r$ のように解が球面波状に拡がっていくものを想定して考え出されたものです．

多体問題では散乱していく粒子たちはいくつかのクラスターに分かれており，しかもクラスターへの分かれ方も多数の組み合わせがありますから，（10.1）の解の形は $e^{i\sqrt{E}r}/r$ のような簡単なものとは思われません．そのために，多粒子系に対するゾンマーフェルトの放射条件を発見することは難しかったのですが，次のようにすればよいことがわかりました．

$x=(x_1, \cdots, x_{N-1}) \in \boldsymbol{R}^{3(N-1)}$ をヤコビ座標とします．実数 s に対して，$L^{2,s}$ とは

$$\|u\|_s^2 = \int_{\boldsymbol{R}^{3(N-1)}} (1+|x|)^{2s} |u(x)|^2 dx < \infty \tag{10.2}$$

となる関数全体としましょう．方程式（10.1）で $E>0$ の場合を考えます．$E<0$ の場合は少し複雑になりますので略します．$\varepsilon>0$ を非常に小さくとって，$\rho(t) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ を $\rho(t)=1$ （$t<\sqrt{E}-2\varepsilon$），$\rho(t)=0$ （$t>\sqrt{E}-\varepsilon$）となるようにとります．$\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$ として

$$Pu = \int_{\boldsymbol{R}^{3(N-1)}} e^{ix\cdot\xi} \rho\left(\frac{x\cdot\xi}{\langle x \rangle}\right) \langle \xi \rangle^{-k} \hat{u}(\xi)\, d\xi \tag{10.3}$$

という作用素を考えます．$k>0$ は非常に大きい定数です．そのとき，次の定理が成り立ちます：

ある定数 $0<\alpha<1/2<s$ に対して $u \in L^{2,-s}$，$Pu \in L^{2,-\alpha}$ となるような（10.1）の解はただ一つである．

また，レゾルベント $R(E+i\varepsilon)=(H-E-i\varepsilon)^{-1}$ において ε を 0 に近づけますと，$s>1/2$ のときには $L^{2,s}$ から $L^{2,-s}$ への作用素とみて極限 $R(E+i0)$ をもち，さらに $PR(E+i0)$ はある $0<\alpha<1/2$ に対して $L^{2,s}$ から $L^{2,-\alpha}$ への有界作用素であることもわかります．このような意味で，$Pu \in L^{2,-\alpha}$ はレゾルベントの境界値 $R(E+0)$ を特徴づける条件です．（10.3）は Sommerfeld

の与えた作用素 $\dfrac{\partial}{\partial r}-i\sqrt{E}$ とは大分違って見えますが，$Pu \in L^{2,-\alpha}$ は条件 $\left(\dfrac{\partial}{\partial r}-i\sqrt{E}\right)u = o\left(\dfrac{1}{r}\right)$ の一般化であることもわかります．

(10.3) のような作用素を擬微分作用素といいます．Sommerfeld の与えた微分作用素による定式化を離れて，現代数学の道具を用いることで多体系への一般化ができたのです．

10.2　3 体問題の S 行列

3 体問題の場合に，S 行列を考えてみましょう．3 個の粒子に 1，2，3 という名前をつけます．散乱実験としては 1 と 2 が束縛状態を作り，これに 3 が衝突するという状況が実際的でしょう．このとき衝突後，次のような結果が起こりえます．

$$
(12)+(3) \Longrightarrow \begin{cases} \text{(a)} & (12)+(3) \\ \text{(b)} & (12)^{*}+(3)_{*} \\ \text{(c)} & (12)'+(3) \\ \text{(d)} & (13)+(2) \\ \text{(e)} & (1)+(2)+(3) \end{cases}
$$

(a) は弾性散乱と呼ばれ，衝突の前後で粒子たちの状態が変わらないものです．(b) ～ (e) は非弾性散乱と呼ばれます．(b) は (12) というペアがエネルギーの高い（低い）固有状態に移り，粒子 3 がエネルギーを失った（得た）状態です．(c) は (12) というペアのエネルギーは同じですが，別の固有状態に移ったというものです．(d) では組み替えが起こっています．(e) は衝突によって束縛が解かれ 3 個の粒子がバラバラになった状態です．

これらの衝突過程に対応して，それぞれ S 行列があります．散乱断面積を計算するには S 行列の積分核が存在することが必要ですが，これはあまり自明なことではありません．それでも (a) ～ (d) は比較的やさしくわかるのですが，(e) は本質的に 3 体問題的な解析を必要とし難しいのです．

ポテンシアルがある程度速く0に減少するときには次のことがわかります．(e) という break-up process に対する S 行列は積分核表示をもつ．2体の部分系が0を固有値にもつか共鳴状態にもつならば，その積分核は特異点をもつ．S 行列は特異点のまわりで展開され，その展開係数は2体散乱の S 行列で書ける．

このように3体問題についてならば，S 行列をかなり詳しく解析できるようになりました．さらに，高エネルギーでの振る舞いを調べたり，プランクの定数を0に近づけたりしたときの漸近表示なども得られています．これらの結果は部分的には一般の N 体系にも拡張されています．こうして，難解とされていた多体問題に関して，数学の立場からかなり深い解析ができるようになってきているのです．

参考文献

[1] H. Isozaki, Mathematical aspects of the quantum mechanical many-body problem, 1994年の学習院大学でのサマースクールの講演予稿集．［これは市販されてはいないので手に入りにくいかもしれません．この予稿の内容すべてを再現しようとしますと，ページ数をたくさん必要としますのでここではその内容を部分的にお伝えしました．］

[2] 黒田成俊，関数解析，共立出版，1980．［関数解析学のよい教科書です．］

[3] 江沢 洋・恒藤敏彦 編，量子物理学の展望（下），岩波書店，1978．［この中に加藤敏夫先生の書かれた一文があります．］

[4] J. Dereziński and C. Gérard, *Scattering Theory of Classical and Quantum Mechanical N-particle Systems*, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1997．［時間に依存する方法でユニタリグループを評価し，多体問題の波動作用素の漸近完全性を論じた本です．最新の内容を盛り込み参考文献も豊富です．ただし，数学の専門家向きです．］

第2話

多体問題の話題から

――マクドナルド多項式をめぐって――

栗田英資

0° はじめに

今から300年前に太陽系の惑星や衛星の運動がニュートン力学で記述できることが発見されてから，それを厳密に解くための数多くの試みがなされてきたが，誰一人として成功した者はおらず，結局200年後に三つ以上の物体の運動は解析的には解けないことが明らかとなった．また，物性つまり電子の運動が量子力学に従うことが理解されたのは70年も前のことであるが，未だに伝導体はなぜ伝導体か？ 絶縁体はなぜ絶縁体なのか？ という基礎的な問いにさえ我々は正確に答えることはできていない．これらの基本的な問題が解けない理由はその多体性にある．つまり，解くべき方程式の数が多すぎて解けないわけである．

多数の惑星や電子の運動などを扱う多体問題は重要であるにもかかわらず一般に非常に難しく，古典論においても量子論においても，わずかの例を除きほとんど解けていない．ただし，空間1次元の場合に限っては，厳密に解けるいくつかの例が知られており，その超電導体や量子ホール効果などへの応用も試みられている．また，この1次元可解模型は現在，物性系のみならず，素粒子論，数理物理学，代数学，関数解析学および幾何学にわたる大きな研究分野へと発展し，物理的にも数学的にも興味深い重要な理論となっている．最近は，そのような1次元可解模型でもとくに $1/r^2$ のような長距離相互作用をする系のより深い理解が可能となってきた．ここでは，そのような系を中心に紹介する．

お話しの順番としては，まず第1節で古典多体問題を取り上げ，“古典力学といえども多体問題は難しいこと”を訴えると同時に，量子論でも使える“問題を解くための基本的な戦略”を紹介する．次に，量子論に話を移し，自由運動や2体運動をもとに解析を行なうベーテ仮設の方法を第2節で解説する．第3節と第4節では，最近研究が盛んになってきた長距離相互作用を行なうカロジェロ－サザランド模型とその q－変形の解析を，対称多項式や無限次元代数との関係を中心に行なう．

1° 古典多体問題

1.1　リュービルの定理

まず，直観的に理解しやすい非相対論的な古典力学における多体問題から始めよう．また簡単のために，空間が1次元の場合を考察する．古典多体問題とは，ニュートンの運動方程式

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$H \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{m_i} + V(x_1, \cdots, x_N),$$

つまり，次の微分方程式系を解くことである．

$$m_i \ddot{x}_i(t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(x_1, \cdots, x_N)$$

ここで，t は時間，$x_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ は N 個の粒子の位置，$\dot{x}_i = \dfrac{d}{dt}x_i$，$\ddot{x}_i = \dfrac{d^2}{dt^2}x_i$ はそれらの速度と加速度，m_i は i 番目の粒子の質量，$V(x)$ は粒子間の相互作用を記述するポテンシャルで，各問題ごとに与えられる．また，p_i は運動量，H はエネルギーを表すハミルトニアンである．ここでは簡単のために，すべての質量が等しい場合を考え，$m_i = 1$ としておく．また，ポテンシャル $V(x)$ に対して，すべての座標を一斉にずらしても変わらないとい

う並進不変性 $V(x_1+c, \cdots, x_N+c) = V(x_1, \cdots, x_N)$，つまり空間の一様性と，相互作用が本質的に2体力であること $V = \sum_{i<j} V(x_i, x_j)$ を要請しよう．つまり，

$$V(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{i<j} V(x_{ij}), \qquad x_{ij} \equiv x_i - x_j$$

という場合を考える．

さて，このポテンシャル $V(x)$ が与えられたときに適当な初期条件（時刻 $t=0$ における位置 $x_i(0)$ と速度 $\dot{x}_i(0)$）のもとに上の微分方程式を解くことが古典多体問題の目的であるが，それはとても難しい問題で，特殊な場合を除いて解析的には解けない．たとえば，

(i)　自由粒子，つまり $V(x)=0$ で相互作用をしない場合は簡単で，運動方程式が $\ddot{x}_i = 0$ なので，解は $x_i(t) = x_i(0) + \dot{x}_i(0)t$ となり，粒子は各々等速度運動をする．ただし，粒子は衝突しても互いにすり抜けることにしてある．

(ii)　2粒子（$N=2$）の場合は，重心 $(x_1+x_2)/2$ に関しては自由運動で，相対座標 x_{12} に関してはポテンシャル $2V(x_{12})$ 内を運動する1体問題なので解ける[1]．2体問題は，空間3次元の場合でも，また，質量が異なる場合でも，同様に解くことができる．

(iii)　では，3粒子（$N=3$）の場合はどうだろう．重心 $(x_1+x_2+x_3)/3$ に関しては2体問題と同様に自由運動であるが，相対座標に関しては，たとえば

$$\ddot{x}_{12} = 2V(x_{12})' + V(x_{13})' - V(x_{23})', \qquad V(x)' = \frac{d}{dx}V(x)$$

---

1)　ポテンシャル $V(x)$ における1体問題は簡単で，運動方程式からエネルギー $E \equiv \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x)$ が保存すること $\dot{E}=0$ が従い，1変数 x に対する1階の微分方程式に還元されて問題が解ける．つまり，それを積分した

$$t = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

の逆関数として解が得られる．

となり，右辺が x_{12} だけの関数にならないので $V(x)=x$ というような特殊な場合を除き一般には解けない．19世紀までは，惑星の運動の計算を目的に，空間3次元において万有引力で相互作用する3体問題を解析的に解こうという試みが精力的になされたが，結局，解析的には解けないことが Bruns や Poincaré らにより保存量の数に関する解析から示された．

与えられた問題が解けるかどうか，つまり運動方程式の積分可能性は，保存量の存在にかかっている．実際，保存量

$$I(x_1, x_2, \cdots, x_N, p_1, p_2, \cdots, p_N) = \text{const.}$$

が一つあれば，それを逆に解いて運動方程式の中にある変数の数を一つ減らすことができる．よって，（役に立つ）独立な保存量が $2N-1$ 個あれば，運動方程式を1変数に関する1階の微分方程式に落としてしまえて，積分が遂行できる．実は，独立な N 個の保存量だけから他の $N-1$ 個を発見してしまう解析力学の奥義が知られているので，次のように言える．

定理（Liouville）　独立な N 個の保存量があれば完全可積分である．

たとえば，運動方程式からすぐにわかる保存量の例としては，空間と時間の一様性に起因するところの，全運動量つまり重心運動量 $P \equiv \sum_i p_i$ と全エネルギー H の保存 $\dot{P}=0, \dot{H}=0$ の二つがある．ポテンシャルが特殊な場合を除き，代数的に構成できる保存量はこの二つしかなく3体以上は一般には解けないわけである．

1.2　$1/r^2$ の系

では，どのようなポテンシャルならば可解なのだろうか．もう少し非自明な例の説明から始めよう．古典論として，もしくは次の節で取り上げる量子論として厳密に解ける問題はいくつか知られており，その解き方もいろいろあるが，なかでも重要な戦略は，

戦略　自由粒子や2体問題に帰着させて解く

という方法である．まず，ここでは前者の方法を紹介する［OP］．その方法とは，$X(t)$ を対角線に粒子の座標 $x_i(t)$ が並んだ行列 $X_{ij}(t)=x_i(t)\delta_{ij}$ とし，これをうまくユニタリ変換して自由粒子 $\ddot{X}^{free}(t)=0$ に帰着させようというものである．ここで，δ_{ij} はクロネッカーの δ で，$\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0$（$i\neq j$）である．一見すると自明な結果しか得られないように思えるが，実はこのユニタリ変換は非自明で，$1/r^2$ のような長距離相互作用をする系はこのようにして解かれる．

まず最初に，$X^{free}(t)=U(t)X(t)U^{-1}(t)$ となるうまいユニタリ行列 $U(t)$ を発見する問題を考えよう．両辺を時間微分すると

$$\dot{X}^{free}=ULU^{-1},\qquad L\equiv\dot{X}+[M,X],$$
$$\ddot{X}^{free}=U(\dot{L}+[M,L])U^{-1},\qquad M\equiv U^{-1}\dot{U}$$

となり，最後の式をゼロにしたいので，

$$\dot{L}=[L,M] \tag{1.1}$$

という N 行 N 列行列 L と M を探せばよいことになる．ただし，$X^\dagger=X$，$X^{free\,\dagger}=X^{free}$ より $L^\dagger=L$，$M^\dagger=-M$ である必要がある．

この問題の特殊解として，次のものが知られている．

$$L_{ij}=\dot{x}_i\delta_{ij}+g\frac{1-\delta_{ij}}{x_i-x_j},$$
$$M_{ij}=g\sum_{k\neq i}\frac{\delta_{ij}}{(x_i-x_k)^2}-g\frac{1-\delta_{ij}}{(x_i-x_j)^2},$$

$U(0)=1$（単位行列）および g は純虚数 $g^*=-g$．この特殊解の場合は，$\ddot{X}^{free}(t)=0$ より，$X^{free}(t)=X(0)+L(0)t$ となり，この $X^{free}(t)$ の固有値として問題の $X(t)$ が得られる．さらに，運動方程式は（1.1）式より

$$\ddot{x}_i(t)=-2\sum_{k\neq i}M_{ik}M_{ki}(x_i-x_k)=-2\sum_{k\neq i}\frac{g^2}{(x_i-x_k)^3}$$

となることから，いまの場合のポテンシャルは，$V=-\sum_{i\neq j}g^2x_{ij}^{-2}/2$，つまり $1/r^2$

であったことがわかる．いまは $g^2 \leq 0$ なので，せき力である．

他のポテンシャルの場合も同様にでき，たとえばユニタリ変換を $X^{free} = Ue^{aX}U^{-1}$ のようにすると，a が実数か純虚数かに応じて $1/\sinh^2$ か $1/\sin^2$ のポテンシャルが得られる．よって，

主張　$1/r^2$，$1/\sinh^2$ や $1/\sin^2$ の長距離相互作用の場合は，自由粒子に帰着させて解くことができる．

1.3　ラックス方程式と保存量

(1.1) 式は，可解理論に特徴的に現れる**ラックス方程式**とよばれる重要な関係式であり [Lax]，そのご利益は，保存量の存在を保証してくれることである．実際 $\mathrm{tr}(L^k)$ $(k = 1, 2, \cdots, N)$ が保存量であることがわかる．粒子数が N なので，独立な保存量は高々 N 個であるが，こうして得られたものがすべて独立かどうかは，また別の議論が必要で，後で出てくるヤン-バクスター方程式がその鍵となる．

$1/r^2$ ポテンシャルの場合には，それらが独立であることは簡単にわかる．たとえば，無限の過去もしくは無限の未来において，どの粒子も他の粒子から大きく離れている場合を考えよう．すると，$L_{ij} \cong \dot{x}_i \delta_{ij}$ となり，$\mathrm{tr}(L^k)$ $(k = 1, 2, \cdots, N)$ は自明に独立になる．また，これらは保存量なので，無限の過去もしくは無限の未来以外でも独立のままである．よって，$1/r^2$ や $1/\sinh^2$ の場合は自明に独立になる．しかし，$1/\sin^2$ の場合は，各粒子が大きく離れられないので，別の議論が必要である．したがって，与えられた問題がラックス形式で書ければ，独立性はすぐにはわからないが N 個の保存量を知ることができるので，リュービルの定理より次のように言える．

主張　ラックス形式で書ければ，ほぼ解ける．

ニュートンの運動方程式がラックス形式で書けるのはどのような場合かに

関する一般的解答はない．しかし，ある仮定（L は対角成分のみ速度に依存し，他の部分は相対座標の関数で書ける場合）のもとでは解があり，対応するポテンシャルは，ワイアシュトラスの $\wp$ 関数であることが知られている（たとえば [OP]）．前節の $1/r^2$，$1/\sinh^2$ や $1/\sin^2$ は，$\wp$ 関数のもっているパラメーターを特殊化した場合に対応する．

2° 量子多体問題

次に，量子多体問題を考えよう．古典力学の場合は「ニュートンの運動方程式を積分せよ」という問題だったが，量子力学においては「次のシュレーディンガー方程式の固有値問題を解け」という問題になる．シュレーディンガー方程式は，

$$H\psi(x_1, \cdots, x_N) = E\psi(x_1, \cdots, x_N),$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + V(x_1, \cdots, x_N)$$

（$i = \sqrt{-1}$）である．ここで，x は空間座標，$\psi(x)$ は粒子の状態を表す波動関数，H はハミルトニアンでその固有値 E がエネルギーである．ハミルトニアン H が与えられたときに，波動関数 $\psi(x)$ を適当な境界条件のもとに求めることが目的である．プランク定数 $\hbar \to 0$ の極限が古典力学に対応するが，ここでは $\hbar = 1$ としておく．

量子多体問題においても古典論の場合と同様に，相互作用をしない自由粒子（$V(x) = 0$）は簡単に解け，かつ重要である．その場合，シュレーディンガー方程式の解は平面波 $\psi(x) = \prod_{j=1}^{N} e^{-ik_j x_j}$ で，波数 k_i は i 番目の粒子の運動量を表し，エネルギーは $E = \frac{1}{2}\sum_i k_i^2$ となる．

2.1　δ関数ポテンシャル

量子多体問題において解かれている問題は，古典論の場合と同様，自由粒子や2体問題の性質を使って解く場合が多い．その代表例としてδ関数ポテンシャル

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + c\sum_{i<j}\delta(x_i - x_j)$$

の場合［Y］，つまり剛体芯の粒子がビリヤードの玉のように衝突し合っている系を例にとって，その解き方“ベーテ仮設の方法”[2] を説明する．

2.1.1　2体δ関数ポテンシャル

まず，2体δ関数ポテンシャル $V(x_{12}) = c\delta(x_{12})$ で，せき力 $c>0$ の場合を考えよう．引力の場合は後で述べる．大きさのない粒子を考えているので，古典論においては，本質的に自由な粒子と同じである．なぜなら，どの衝突においてもその前後で運動量とエネルギーが保存するので，二つの粒子の衝突はそれらの粒子の速度の交換しか引き起こさないからである．しかし，量子論においては自由粒子との違いがでてくる．

量子論においても，$x_1 \neq x_2$ ならばポテンシャルが $\delta(x_{12}) = 0$ なので自由粒子である．よって，二つの自由な領域 $x_1 < x_2$ と $x_2 < x_1$ を，境界 $x_1 = x_2$ でうまくつないで答えが得られるはずである．それぞれの領域の波動関数 $\psi^{x_1<x_2}$ と $\psi^{x_2<x_1}$ はエネルギーが $(k_1^2+k_2^2)/2$ の平面波 $e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}$ と $e^{i(k_2x_1+k_1x_2)}$ の重ね合わせで，次のように与えられる．

$$\psi^{x_\alpha<x_\beta}(x_1, x_2) = a_{12}^{\alpha\beta}e^{i(k_1x_\alpha+k_2x_\beta)} + a_{21}^{\alpha\beta}e^{i(k_2x_\alpha+k_1x_\beta)}$$

重ね合わせの係数 $a_{ij}^{\alpha\beta}$ は，粒子 x_α と x_β がそれぞれ k_i と k_j という運動量をもつ確率振幅を与え，波動関数の $x_1 = x_2$ における境界条件[3] から，

$$a_{21}^{\alpha\beta} = Y_{12}^{\alpha\beta}a_{12}^{\alpha\beta}, \qquad Y_{12}^{\alpha\beta} \equiv \frac{(k_1 - k_2)P_{\alpha\beta} - ic}{k_1 - k_2 + ic}$$

という関係をみたさねばならないことがわかる．ここで，粒子の置換 P_{12} つまり $P_{12}a_{ij}^{12} = a_{ij}^{21}$ を導入した．

さらに，いまの場合は付加的な条件として，粒子はボゾン的つまり波動関数が粒子の入れ替えに対して対称であること $\psi(x_2, x_1) = \psi(x_1, x_2)$ を要請しよう．すると $a_{ij}^{12} = a_{ij}^{21}$ となるので，確率振幅 $a_{ij}^{\alpha\beta}$ の間の関係は

$$a_{21}^{\alpha\beta} = \frac{k_1 - k_2 - ic}{k_1 - k_2 + ic} a_{12}^{\alpha\beta}$$

となり，これで全体の規格化定数を除き波動関数が求まったわけである．

2.1.2 N 体 δ 関数ポテンシャル

N 体も同様に解くことができる．2 体の場合と同様，$N!$ 個の自由な領域 $x_{\rho(1)} < x_{\rho(2)} < \cdots < x_{\rho(N)}$，$\rho \in$ (N 次の置換群) をうまくつないで答えが得られる．それぞれの領域の波動関数はエネルギーが $\sum_i k_i^2/2$ の平面波の重ね合わせで与えられる．一か所だけ隣りあった部分が入れ替わっている二つの領域に対する境界条件から，2 体の場合と同様にして，確率振幅は全体の規格化定数を除き，2 体的操作 $Y_{ij}^{\alpha\beta}$ を次々に作用させていって与えられることがわかる．その結果が無矛盾であることは，次のような粒子の入れ替え

$$ij \to ji \to ij,$$

$$\begin{array}{ccccc} & & ijk & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ jik & & & & ikj \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ jki & & & & kij \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & kji & & \end{array}$$

に対する無矛盾性，つまり，次の二つの関係によって保証されている．

$$Y_{ij}^{\alpha\beta} Y_{ji}^{\alpha\beta} = 1,$$

---

2) “仮設” は “仮説” の誤植ではありません．

3) (i) $x_1 = x_2$ で波動関数が連続であること，および，
(ii) シュレーディンガー方程式を相対座標 $x_{12} = x_1 - x_2$ に関して原点近傍で積分 $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx_{12}$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) して得られる波動関数の 1 階導関数の不連続性．

$$Y_{jk}^{\alpha\beta} Y_{ik}^{\beta\gamma} Y_{ij}^{\alpha\beta} = Y_{ij}^{\beta\gamma} Y_{ik}^{\alpha\beta} Y_{jk}^{\beta\gamma}.$$

とくにこの第二式は**ヤン-バクスター方程式**とよばれ，互いに可換な独立な保存量の存在と密接に関わっているため，可解模型において最も重要な関係式であると考えられている．この系の特徴は次のようにまとめられる．

特徴　相互作用があるにもかかわらず，

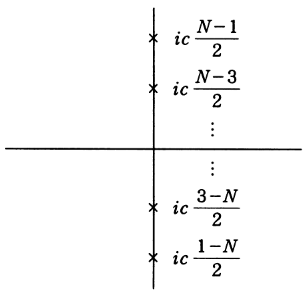
（i）　波動関数は自由な平面波の簡単な重ね合わせで書ける，

（ii）　重ね合わせの情報は2体問題に分解してしまう．

これはいまの問題だけに限らず，ある意味で多くの可解理論に共通した普遍的な性質であり，このような解き方は**ベーテ仮設の方法**とよばれている [B].

2.1.3　引力 δ 関数ポテンシャル

引力 $c<0$ の場合も同様に解かれている．引力の場合は束縛状態が実現されると考えられるが，境界条件が $\psi(x)\to 0$ （$|x|\to\infty$）となる解は唯一存在して，それは前項の解において，運動量が純虚数で $k_j = ic(N-2j+1)/2$ のように複素平面上に実軸を中心としてストリング的に対称に並んでおり，確率振幅が $a_{12\cdots N}$ を除いてすべて消えている場合にあたる．



このように，束縛状態であるにもかかわらず，いかにも自由粒子のような性質をもっていることは，1次元可積分系のひとつの特徴となっている．

2.2　$1/r^2$ ポテンシャルのラックス形式

前節で，δ 関数ポテンシャルは本質的に 2 体的に解けてしまうことがわかった．これからは，もう少し非自明な長距離相互作用を考えよう．$1/r^2$ ポテンシャルの場合［C, Su1］,

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i<j}\frac{\beta(\beta-1)}{(x_i-x_j)^2}$$

は古典論と同様にラックス形式で表すことができる［UHW］．ラックス形式 $i\dot{L}_{jk} \equiv [H, L_{jk}] = [L, M]_{jk}$ をみたす L と M は，古典論の場合のそれの運動量 p_j を座標の微分 $-i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ で置き換えた

$$L_{ij} = -\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} + \beta\frac{1-\delta_{ij}}{x_i - x_j},$$

$$M_{ij} = \beta\sum_{k\neq i}\frac{\delta_{ij}}{(x_i-x_k)^2} - \beta\frac{1-\delta_{ij}}{(x_i-x_j)^2}$$

である．ここで，β は実数である．ハミルトニアンの結合定数が古典論の場合の β^2 から $\beta(\beta-1)$ にずれているが，これは非可換量 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ が入ってきたことによる量子補正である．

残念ながら，量子論においては $\mathrm{tr}\,(L^k)$ は保存量にはならない．なぜなら，L と M の成分が非可換なため $\mathrm{tr}\,LM \neq \mathrm{tr}\,ML$ だからである．しかし，いまの場合は M が $\sum_i M_{ij} = \sum_j M_{ij} = 0$ という性質をもっているため，tr ではなくすべての成分の和 $\sum_{ij}(L^k)_{ij}$ $(k = 1, 2, \cdots, N)$ が保存量になること，つまりハミルトニアン $H = \sum_{ij}(L^2)_{ij}$ と可換であることがわかる．さらに，古典論と同様にそれらは独立，つまり互いに可換であり，それらは同時固有状態をもつ．このように古典論におけるリュービルの定理にあたるものは，量子 N 体問題の場合は次のようになる．

定理　ハミルトニアン H を含む独立な（互いに可換な）N 個の保存量があれば，その系は完全可積分（可解）である．

また，$1/\sin^2$ ポテンシャルの場合も同様にして保存量は得られるが，それらの独立性はすぐにはわからない．しかし，この模型の独立な保存量の存在はまったく別の方法で示されており［Mac］，やはり完全可積分であることがわかっている．次節では，この模型の波動関数について詳しく解説する．

3° カロジェロ－サザランド模型

3.1 カロジェロ－サザランド・ハミルトニアンとそのエネルギー固有値

カロジェロ－サザランド（CS）模型は，次のハミルトニアンで定義される量子 N 体系である［Su2］．

$$H_{CS} = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sum_{i<j} \frac{\beta(\beta-1)}{\sin^2(x_i - x_j)\pi/L} \tag{3.1}$$

粒子は，周の長さが L の円周上にあり，x_i は円の中心からの角度を表し，その弧にそって $1/r^2$ の相互作用をしている．周長 L を無限大にすると $1/r^2$ 相互作用のカロジェロ模型に帰着するが，ここでは，$L=2\pi$ つまり半径1にしておく．β は結合定数で，$\beta \leftrightarrow 1-\beta$ という反転に対してハミルトニアンは対称である．β が実数の場合（つまり $\beta(\beta-1) \geq -1/4$），この系には束縛状態がないことがわかる．以後，β が実数の場合に話を限る．

ハミルトニアンは，ラックス演算子 L_{ij} を用いて

$$H_{CS} = \sum_i h_i(\beta)^\dagger h_i(\beta) + E_0, \qquad E_0 = \frac{\beta^2}{12}N(N^2-1),$$
$$h_i(\beta) = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\beta}{2}\sum_{j(\neq i)}\cot\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right) = -\sum_{j(\neq i)} L_{ij}$$

と書けるのでエネルギーは正定値であり，最低エネルギーは E_0 で，その状態（真空）は $h_i(\beta)$ もしくは $h_i(1-\beta)$ を作用させて消されるものである．どちらを考えても同じなので，ここでは前者の真空

$$\Delta^{\beta} \equiv \prod_{i<j} \sin^{\beta}\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right)$$

を採用する．粒子の統計性，つまり粒子の入れ替えに対する波動関数の対称性は，結合定数 β の値に依存しており，β が偶数（奇数）なら真空は粒子の入れ替えに対して対称（反対称）なので，粒子はボソン（フェルミオン）的である．

他のエネルギー固有状態（励起状態）を考えよう．ここでもまたベーテ仮設の方法が有効である．まず，励起状態 $\psi(x)$ を $J(x)\Delta(x)^{\beta}$ と書き，真空の寄与を取り去った $J(x)$ を中心に議論する．粒子の統計性は，真空のそれと同じでなければならないので，$J(x)$ は粒子の入れ替えに対して対称である．ベーテ仮設の方法とは，相互作用のある場合の固有状態を自由な場合のそれ，つまり平面波の簡単な重ね合わせで表す方法だった．平面波は $\prod_j e^{ik_jx_j}$ であり，励起状態 $J(x)$ は対称関数なので，$z_j \equiv e^{ix_j}$ という新しい座標を導入すると $J(x)$ は z_j の対称多項式になると期待される．真空の寄与を取り去った $J(z)$ に直接作用する新しいハミルトニアンを新しい座標で書くと，

$$\begin{aligned} H &\equiv \Delta^{-\beta} H_{CS} \Delta^{\beta} - E_0 \\ &= \sum_{i=1}^{N} D_i^2 + \beta \sum_{i<j} \frac{z_i + z_j}{z_i - z_j}(D_i - D_j), \qquad D_i \equiv z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \end{aligned}$$

となる．

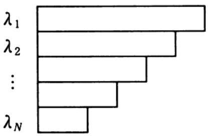
まず，ベーテ仮設の方法に従い，固有状態の候補として，N 種類の運動量（$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq 0$）をもつ平面波の対称な重ね合わせ（単項対称関数）

$$m_{\lambda} \equiv \sum_{\mathrm{sym}} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_N^{\lambda_N}$$

を考えよう．ここで，$\sum_{\mathrm{sym}}$ は z_i たちに関する対称化を表す．残念ながら，これらはハミルトニアンの固有状態ではないが，ハミルトニアンの作用が必ず上三角行列形になることがわかり，固有値 ε_{λ} はその上三角行列の対角成分で与えられる．それに真空のエネルギー E_0 を加えた全エネルギー $E_{\lambda} = E_0 + \varepsilon_{\lambda}$ は

$$E_\lambda = \sum_{i=1}^{N} k_i^2, \qquad k_i \equiv \lambda_i + \frac{\beta}{2}(N+1-2i)$$

のように，運動量のセットもしくはヤング図 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq 0)$ でパラメトライズされる．



これはいかにも擬運動量 k_i をもった擬粒子が自由運動しているベーテ仮設的エネルギーになっている．また，隣りあった擬運動量は $k_i - k_{i+1} \geq \beta$ をみたす必要がある．$\beta = 0$ や $\beta = 1$ のときは普通のボソンやフェルミオンであるが，それ以外は分数統計的な擬粒子であると解釈できる．このように，ベーテ仮設の方法は固有状態の一般形こそうまく与えなかったが，その具体的構成法と正確な固有値を教えてくれた．

3.2　固有状態（ジャック対称多項式）とその積分表示

CS ハミルトニアン H の固有状態はジャック対称多項式［St］とよばれている[4)]．たとえば全運動量が 1，2，3 の場合，ジャック対称多項式を単項対称関数 m_λ で表すと，次のようになる．

$$J_{(1)} = m_{(1)},$$

$$\begin{pmatrix} J_{(2)} \\ J_{(1,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\beta & 2\beta \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(2)} \\ m_{(1,1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} J_{(3)} \\ J_{(2,1)} \\ J_{(1,1,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\beta)(2+\beta) & 3(1+\beta)\beta & 6\beta^2 \\ 0 & (1+2\beta)\beta & 6\beta^2 \\ 0 & 0 & 6\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(3)} \\ m_{(2,1)} \\ m_{(1,1,1)} \end{pmatrix}.$$

ジャック対称多項式は，パラメーターβ（結合定数）を一つもち，これを特殊化してみると，いろいろな対称多項式をそのなかに含んでいることがわかる．たとえば，$\beta=0,1,\infty$ の場合は，それぞれ単項対称多項式 m_λ，シューア関数，基本対称多項式である．

ジャック対称多項式の性質は，数学的にいろいろ調べられているが，とくに次の直交性と完全性は重要である．まず，内積

$$\langle f,g\rangle \equiv \oint f(1/z)g(z)\Delta^2\prod_{i=1}^{N}\frac{dz_i}{z_i} \tag{3.2}$$

に対してハミルトニアン H は自己双対である．ここで，積分経路は全空間，つまり原点のまわりの半径1の円周で，$\Delta^2=\prod_{i\neq j}\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)^\beta$ は真空の寄与である．この自己双対性から（固有値が縮退する場合は非自明だが），$\langle J_\lambda, J_\mu\rangle \propto \delta_{\lambda,\mu}$ という直交性がわかり，そのノルムも組合せ論的な記述がなされている［St］．ハミルトニアンがやはりまた自己双対となる別の種類の内積も存在し，それに対する直交性から次の完全性が従う．

$$\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M}(1-x_iy_j)^{-\beta}=\sum_\lambda J_\lambda(x)J_\lambda(y)j_\lambda$$

ここで，j_λ は $J_\lambda(x)$ の規格化に依存するある数（β の関数）である．和はすべてのヤング図についての和である．この式で変数 x の数 N と y のそれ M とが独立であることは，次節の議論で大変重要となる．

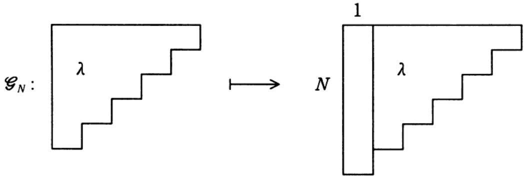
CS 模型の相関関数の計算がいくつかなされていたが，最近は，このジャック多項式の直交性を用い動力学的相関関数も求められている［H，Pa］．古典力学の3体問題すら解析的に解けないことからも簡単に予想がつくように，量子多体系は一般には非常に解析が難しい．それにもかかわらず，エネルギー固有値のみならず相関関数まで計算できてしまったのである．

4）固有値 ε_λ には縮退があるので，エネルギーを与えただけでは固有状態は一意には定まらない．そこで，一意的に定めるために付加的な条件が必要であるが，それはマクドナルド多項式の所（第4節）で述べる．

さて次に，固有状態を具体的に与える方法を紹介しよう．これから導入するジャック多項式のエネルギーや粒子数を変化させる二つの変換を真空に次々に作用させると，任意のジャック対称多項式が得られるのである．

まず，擬運動量を $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$ から $\lambda+(1^N)=(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_N+1)$ へ一斉に増加させるガリレイ変換 $\mathscr{G}_N$ を導入する．それは，波動関数に全粒子の運動量が 1 の平面波 $\prod_j e^{ix_j}=\prod_j z_j$ を掛ける作用である．この作用によってジャック多項式は，次のように長方形 (1^N) が左から加わったヤング図に対応するジャック多項式に変換されることがわかる．

$$\mathscr{G}_N\cdot J_\lambda(z_1,\cdots,z_N)=J_{\lambda+(1^N)}(z_1,\cdots,z_N)=J_\lambda(z_1,\cdots,z_N)\cdot\prod_{i=1}^N z_i$$

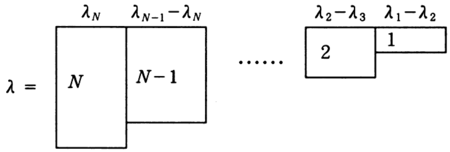


二つ目の変換 $\mathscr{N}_{NM}$ は，次のように粒子数を M から N に変える積分変換である．

$$\begin{aligned}\mathscr{N}_{NM}\cdot J_\lambda(t_1,\cdots,t_M)&=J_\lambda(z_1,\cdots,z_N)\\&=\left\langle\prod_{i=1}^N\prod_{j=1}^M(1-z_it_j)^{-\beta},\ J_\lambda(t_1,\cdots,t_M)\right\rangle\end{aligned}$$

ここで，$\langle *,*\rangle$ は (3.2) 式の内積で，積分は $t_1,\cdots,t_M$ で行なう．証明は簡単で，ハミルトニアンの二つの自己双対性を用いて証明される．また，ジャック多項式の直交性と完全性を用いても証明できる．

すると，粒子数 1 の真空つまり 1 から始めて，この二つの変換 $\mathscr{G}_n$ と $\mathscr{N}_{nm}$ を繰り返し用いることで，N 粒子のすべての固有状態を得ることができる．ヤング図 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$，つまり



に対しては，次のように図の右から順に構成してゆく．

(i)　まず，真空1にガリレイ変換 $\mathscr{G}_1$ を $\lambda_1-\lambda_2$ 回作用させ，縦が粒子数1で横が運動量 $\lambda_1-\lambda_2$ の長方形ヤング図に対応するジャック多項式を得る．

(ii)　次に，粒子数を変える積分変換 $\mathscr{N}_{2,1}$ で，粒子数を1から2に増やす．

(iii)　さらに，ガリレイ変換 $\mathscr{G}_2$ を $\lambda_2-\lambda_3$ 回作用させ，ヤング図に縦が粒子数2で横が運動量 $\lambda_2-\lambda_3$ の長方形が加わわったジャック多項式を得る．

(iv)　以上のような操作を繰り返すことにより，任意のヤング図 λ に対応するジャック多項式の積分表示が得られる［MY2，AMOS］．

定理　$J_\lambda(z) = \mathscr{G}_N^{\lambda_N}\mathscr{N}_{N,N-1}\mathscr{G}_{N-1}^{\lambda_{N-1}-\lambda_N}\cdots\cdots\mathscr{G}_2^{\lambda_2-\lambda_3}\mathscr{N}_{2,1}\mathscr{G}_1^{\lambda_1-\lambda_2}\cdot 1.$

とくに，縦 M 横 s の長方形 $\lambda=(s^M)$ の場合は

$$J_{(s^M)}(z_1, \cdots, z_N) = \left\langle \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M}(1-z_i t_j)^{-\beta},\ \prod_{i=1}^{M} t_i^s \right\rangle,$$

また，横1列の場合は

$$\sum_{s\geq 0} J_s(z_1, \cdots, z_N)t^s = \prod_{i=1}^{N}(1-z_i t)^{-\beta} = \exp\left\{\beta\sum_{n>0}\frac{1}{n}p_n t^n\right\}$$

($p_n \equiv \sum_i z_i^n$) とも書ける．この公式は，次の項で説明するような CS 模型の新たな代数的性質を明らかにしてくれる．

3.3　ジャック多項式とヴィラソロ代数

スピン鎖やゴーダン模型をはじめとして，可解模型の背景には，大きな対称性が隠れている場合がよくある．いまの場合も意外なことに，ジャック多項式は，臨界点上の統計系に応用され［BPZ］大きな成果をあげたヴィラソロ代数という無限次元代数と関係がある．

ヴィラソロ代数は

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \tag{3.3}$$

という関係をみたす整数無限個の L_n（$n \in \boldsymbol{Z}$）で生成される無限次元リー代数である．$c \in \boldsymbol{C}$ は，代数をパラメトライズする中心電荷であり，それを含む項は，ヤコビ律から一意的に定まる．この代数は，$c=0$ の場合 $L_n = -z^{n+1}\dfrac{\partial}{\partial z}$ と実現でき，等角写像という幾何学的意味をもっている．この性質が，スケール不変な臨界点上の統計系に適用できた大きな理由のひとつである．

この代数の表現を考えた場合，その既約性を統制する特異状態という重要な状態が存在するが，それがまさしくヤング図が長方形の場合のジャック多項式と同じ形であるという，意外な関係が発見されている．もう少し正確に述べると，両者の積分表示がある変換でまったく1対1に対応しているのである［MY1］．その理由は，そもそも CS 模型のハミルトニアン H を，ベキ和 $p_n = \sum_{i=1}^{N} z_i^n$ とその微分で表現した場合

$$H - (\beta-1)P = \beta\sum_{n>0} p_n \mathcal{L}_n, \qquad P \equiv \sum_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

となり，この $\mathcal{L}_n$ がヴィラソロ生成子になっていることに起因する［AMOS］．

ヤング図が長方形の場合のジャック多項式はヴィラソロ代数の特異状態と一致していたが，一般のヤング図のジャック多項式はヴィラソロ代数を拡張した $\mathscr{W}_n$ 代数［FL］の特異状態で表現できることが，同じようにしてわかる．よって，次のように言える［MY2，AMOS］．

主張 CS ハミルトニアンの固有状態つまりジャック多項式は，ヴィラソロ代数や $\mathscr{W}_n$ 代数の特異状態で表現できる．

4° ルイセナース模型とマクドナルド多項式

CS 模型にはその q-変形模型があり，CS ハミルトニアンやその固有状態であるジャック多項式にあたるものの変形は，それぞれマクドナルド演算子やマクドナルド多項式とよばれている．CS 模型の場合と同様にマクドナルド多項式の積分表示も得られ，さらにその奥にひそむ代数的性質も探ることが可能であり，それは q-変形ヴィラソロや q-変形 $\mathscr{W}_n$ というべきものになっている．

4.1 ルイセナース・ハミルトニアンとマクドナルド多項式

CS 模型を相対論的に拡張すると，その q-変形模型が得られる．そのハミルトニアンは，光速を c として次のように与えられる［R］．

$$H_R = \frac{c^2}{2}(H_1 + H_{-1}),$$

$$H_{\pm 1} = \sum_{j=1}^{N} \prod_{k \neq j} \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}\left(x_j - x_k \mp i \frac{\beta}{c}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}(x_j - x_k)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial x_j}\right\} \prod_{k \neq j} \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}\left(x_j - x_k \pm i \frac{\beta}{c}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}(x_j - x_k)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\alpha \equiv \dfrac{2\pi}{L}$ とすると，非相対論的極限で $\lim_{c \to \infty}(H_R - Nc^2) = \dfrac{1}{2}H_{CS}$ のように（3.1）式の CS ハミルトニアンに移行する．$\alpha = 1$ として，新しい変数 $q \equiv e^{-1/c}$，$t \equiv q^{\beta}$，$z_j \equiv e^{ix_j}$ で書き換えると，その真空の自乗は

$$\Delta \equiv \prod_{i \neq j} \prod_{k \geq 0} \frac{1 - q^k z_i / z_j}{1 - t q^k z_i / z_j}$$

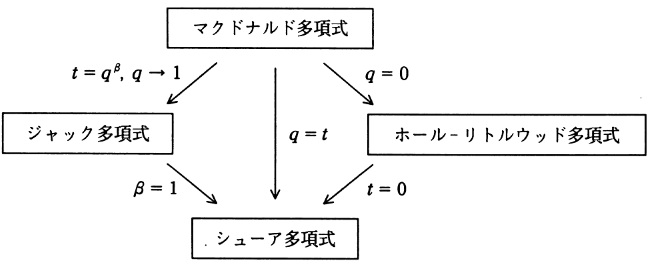
となり，真空の寄与を取り去ったハミルトニアンは

$$\Delta^{-1/2} H_{\pm 1} \Delta^{1/2} = t^{\mp(N-1)/2} H(q^{\pm 1}, t^{\pm 1}),$$

$$H(q, t) = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j \neq i} \frac{t z_i - z_j}{z_i - z_j} q^{D_i}, \qquad D_i = z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

となる．この励起状態に対するハミルトニアン $H(q, t)$ は**マクドナルド演算子**とよばれ，その固有状態は，二つのパラメーター q, t をもつマクドナルド対称多項式 $P(z_1, \cdots, z_N)$ として知られている．ここでもまたマクドナルド演算子を含む互いに可換な N 個の独立な演算子の組が存在し［Mac］，完全可積分な模型になっている．

固有値は，ジャック多項式の場合と同様に，ベーテ仮設の方法で得られる．つまり，単項対称多項式 m_λ にマクドナルド演算子を作用させたときの変換行列がジャック多項式の場合と同様に上三角になり，その変換行列を対角化してマクドナルド演算子の固有状態と固有値が求まる．固有値は，その変換行列の対角成分そのもので，$\varepsilon_\lambda = \sum_{i=1}^{N} t^{N-i} q^{\lambda_i}$ のようにヤング図 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq 0)$ でパラメトライズされる．ここで，q, t が一般ならば固有値の縮退がないことに注意しよう．ジャック多項式はマクドナルド多項式の非相対論的な極限になっているが，同様にして，マクドナルド多項式はパラメーターを特殊化するといろいろな多項式に移行することがわかる．たとえば，



などである．ジャック多項式はハミルトニアンの固有値に縮退があったのでハミルトニアンだけでは一意的に定義できなかったが，いまの場合は縮退がない．よって，ジャック多項式をマクドナルド多項式の極限として定義するとジャックの非一意性の問題はなくなる．

4.2 マクドナルド多項式と q-変形ヴィラソロ代数

ジャック多項式はヴィラソロ代数や $\mathscr{W}_n$ 代数の特異状態で表現できた．実は，その q-変形であるマクドナルド多項式もまた，ある代数 q-変形ヴィラソロ代数および q-変形 $\mathscr{W}_n$ 代数と関係がある．

前者の q-変形ヴィラソロ代数は［SKAO］

$$
\begin{aligned}
[T_n, T_m] &= -\sum_{l=1}^{\infty} f_l (T_{n-l} T_{m+l} - T_{m-l} T_{n+l}) \\
&\quad - \frac{(1-q)(1-t^{-1})}{1-p} (p^n - p^{-n}) \delta_{m+n,0}, \\
f(z) &\equiv \sum_{l=0}^{\infty} f_l z^l \equiv \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(1-q^n)(1-t^{-n})}{1+p^n} z^n \right\}
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

という関係をみたす T_n $(n \in \boldsymbol{Z})$ で生成される二つのパラメーター q, t をもつ無限次元代数である．ただし，$p \equiv q/t$ である．右辺が生成子の 2 次なのでリー代数ではないが，ヤコビ律などは非自明に満足されている．$t = q^{\beta}$ とすると，$q \to 1$ の極限で $c = 1-6(\beta-1)(1-1/\beta)$ のヴィラソロ代数（3.3）に移行する．また，$T(z) = \sum_{n \in Z} T_n z^{-n}$ という母関数で表示すると，上の代数は

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{w}{z}\right) T(z) T(w) - T(w) T(z) f\left(\frac{z}{w}\right) \\
&\quad = -\frac{(1-q)(1-t^{-1})}{1-p} \left\{ \delta\left(\frac{pw}{z}\right) - \delta\left(\frac{w}{pz}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

と同等である．ここで，$\delta(x) \equiv \sum_{n \in Z} x^n$ は δ 関数である．これは，q-変形ヴィラソロの生成子 $T(z)$ の入れ替えが（4.1）式の $f(z)$ という関数で与えられるということを表している．ヴィラソロ代数の場合は，ヤコビ律によって中

心電荷の項が定まったが，いまの場合も，次のような入れ替え

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & T(x)\,T(y)\,T(z) & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
T(y)\,T(x)\,T(z) & & & & T(x)\,T(z)\,T(y) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
T(y)\,T(z)\,T(x) & & & & T(z)\,T(x)\,T(y) \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & T(z)\,T(y)\,T(x) & &
\end{array}
$$

に対する無矛盾性から，この関数 $f(z)$ が一意的に決まってしまう．

ジャック多項式の場合と同様に，ヤング図が長方形の場合のマクドナルド多項式はこの代数の特異状態と一致することがわかる．長方形以外の一般のヤング図に対しては，q-$\mathscr{W}$ 代数［FF，AKOS］の特異状態が対応することも同様にわかり，次のように言える．

主張　マクドナルド多項式は，q-ヴィラソロ代数や q-$\mathscr{W}_n$ 代数の特異状態で表現できる．

ヴィラソロ代数は，CS 模型のような量子多体問題とは別に統計系の振る舞いをも非常にうまく記述したが，その可積分変形[5]としての q-変形ヴィラソロ代数に対しても同じことが期待できないだろうか？　ヴィラソロは臨界点直上でしかその威力を発揮できなかったわけだが，q-変形ヴィラソロが非臨界点に適用できるとすれば大変ありがたい．一方，アフィン・リー代数に対しては次の表のようにその q-変形代数[6]が以前から知られており，XXZ 模型などへの応用も行なわれている．

臨界現象 (無質量)	→	非臨界現象 (有質量)
	可積分変形	
ヴィラソロ代数	→	q-変形ヴィラソロ代数
$\mathscr{W}$ 代数	→	q-変形 $\mathscr{W}$ 代数
アフィン・リー代数	→	量子アフィン・リー代数 ヤンギアン代数

実は最近，この q-変形ヴィラソロ代数は制限面模型という広いクラスの統計系の非臨界現象を記述していることが発見された [LP]．具体的には，制限面模型の相関関数が q-変形ヴィラソロ代数の表現論を用いて計算できてしまうのである．また，q-変形ヴィラソロ生成子が XYZ 模型の束縛状態の生成消滅演算子であることもわかった [Lu]．さらに最近，量子アフィン・リー代数の有限次元表現の指標との関係も明らかになっており [FR]，この代数の今後の発展が楽しみである．

5° おわりに

空間1次元の多体問題の解析に重要な役割を演じるラックス方程式やベーテ仮設の方法などを例をもとに紹介し，とくに，長距離相互作用を行なうカロジェロ-サザランド模型とジャック多項式やマクドナルド多項式などの対称多項式との関係やヴィラソロ代数や q-変形ヴィラソロ代数などの無限次元代数との関係を紹介した．ここで述べた長距離相互作用をもつ系と無限次元代数の関係を用いて，模型のより深い理解，たとえば一般的な相関関数の導出な

5) 本書の梁氏の解説参照.
6) 本書の中西氏の解説参照.

どが可能になるのではないかと期待される．

ここではまったく述べなかったが，ポテンシャルの一般ルート系への拡張［OP］，スピンなどの内部自由度をもたせた拡張やそのヤンギアン対称性，物性系との関係［K, KY］，超弦理論や行列模型との関係［Po］，多変数超幾何関数やアフィン代数との関係なども重要である．可解模型に対して重要な役割を演じるヤン-バクスター方程式やダンクル演算子の代数（アフィン・ヘッケ代数）などにはほとんど触れることができなかった．また，ジャック多項式には他に GL_N の指標の一般化としての記述およびダンクル演算子を用いた微分表示［LV］もわかっている．

参考文献

[AKOS] H. Awata, H. Kubo, S. Odake and J. Shiraishi, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 401 − 416.

[AMOS] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake and J. Shiraishi, *Phys. Lett.* **B347** (1995), 49 − 55 ; *Nucl. Phys.* **B449** (1995), 347 − 374.

[B] H. A. Bethe, *Z. Phys.* **71** (1931), 205 − 226.

[BPZ] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241** (1984), 333 − 380.

[C] R. Calogero, *J. Math. Phys.* **10** (1969), 2191 − 2196, 2197 − 2200.

[FF] B. Feigin and E. Frenkel, *Comm. Math. Phys.* **178** (1996), 653 − 678.

[FL] V. Fateev and S. Lykyanov, *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988), 507 − 520.

[FR] E. Frenkel and N. Reshetikhin, The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of W-algebras, math. QA/9810055.

[H] Z. N. C. Ha, *Nucl. Phys.* **B435** (1995), 604 − 636.

[K] 川上則雄，日本物理学会誌49巻（1994），987 − 993.［長距離相互作用する系の物理的な解説がある.］

[KY] 川上則雄・梁 成吉，共形場理論と1次元量子系，岩波書店，1997.

[Lax] P.D. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.* **21** (1968), 467.

[LP] S. Lukyanov and Y. Pugai, *Nucl. Phys.* **B473** (1996), 631.

[Lu] S. Lukyanov, *Phys. Lett.* **B367** (1996), 121 − 125.

[LV] L. Lapointe and L. Vinet, *Comm. Math. Phys.* **178** (1996), 425 − 452.

[Mac] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Functions* (2nd ed.), Oxford University Press, 1995.

[MY1] K. Mimachi and Y. Yamada, *Comm. Math. Phys.* **174** (1995), 447 − 455.

[MY2] K. Mimachi and Y. Yamada, Talk at the workshop "Hypergeometric Functions" at RIMS (1994), Dec. 12 − 15.

[OP] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, *Phys. Rep.* **71** (1981), 313 − 400 ; **94** (1983), 313 − 404.

[Pa] V. Pasquier, in *Integrable Models and Strings*, A. Alekseev et. al. edit, Springer (1994).

[Po] A. Polychronakos, Generalized statistics in one dimension, Lectures at Les Houches (1998), hep-th/9902157.

[R] S. N. M. Ruijsenaars, *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), 191 − 213.

[St] R. Stanley, *Adv. Math.* **77** (1989), 76 − 115.

[Su1] B. Sutherland, *Jour. Math. Phys.* **12** (1970), 246 − 250, 251 − 256.

[Su2] B. Sutherland, *Phys. Rev.* **A4** (1971), 2019 − 2021 ; **A5** (1972), 1372 − 1376.

[SKAO] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata and S. Odake, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 33 − 51.

[UHW] H. Ujino, K. Hikami and M. Wadati, *Jour. Phys. Soc. Japan* **61** (1992), 3425 − 3427.

[Y] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), 1312 − 1314 ; *Phys. Rev.* **168** (1968), 1920 − 1923.

第3話

2次元共形場理論の変形問題

梁　成吉

1° はじめに

2次元共形場の理論（conformal field theory）は，素粒子物理学，低次元の統計（あるいは物性）物理学の分野において，この20年近くにわたり，たいへん活発に研究されてきた数学的な理論である［1］．この共形場理論に現れ，本質的な役割を果たす数学は，「無限次元の対称性」を扱うもので，これは数学の専門分野でも最先端の話題として注目を集めている．本稿では，共形場理論を越えて，より深く2次元場の理論の構造を理解するためのひとつのアプローチとして，共形場理論の変形問題について議論する．

まず，この節の以下の部分では，臨界現象や場の量子論における共形不変性の物理的意味を説明する．2節で，2次元共形場の理論のエッセンスを紹介する［2］．3節では，イジング模型を例として，この1節で概説された事柄を，数式を使って具体的に解説する．4節では，2次元共形場の理論の可積分変形を議論する．ここでも，格子統計模型と共形場の理論の密接な関係が明らかにされる．

本稿を読み進むにあたり，次のような視点を読者に意識していただければ幸いである．素粒子物理学と聞けば，物質の極微の世界を支配する物理法則を追求する学問を思い浮かべるであろう．実際，現在の高エネルギー粒子加速器による素粒子の衝突実験，たとえば米国のフェルミ研究所で行なわれている陽子・反陽子衝突実験では重心系で 10^{12} eV のエネルギー領域に到達している．これを長さのスケールに翻訳すると，10^{-17} cm の世界を探索している

ことになる．一方，統計物理学や物性物理学が対象とする系は，非常に多くの個数の原子や電子から成っている多体系で，典型的な長さのスケールは 10^{-8} cm 程度である．このように，素粒子物理学と統計（あるいは物性）物理学では，その研究対象のもつスケールがずいぶんと異なるものの，両者はたいへん深く結びついている．原子や電子の運動は量子力学で記述され，それらを構成する基本物質として素粒子が存在するのだから，両者が関係するのは当然である，と考えられよう．事実，そのとおりである．しかし，筆者がここで伝えたい素粒子物理学と統計物理学との結びつきは，別の切り口を通して見えてくるものなのである．以下で，そのことを説明していきたい．

1.1　共形不変性

素粒子の世界では，粒子の生成・消滅がありふれた現象として起こっている．素粒子物理学における場の量子論（通常，場の理論とよばれる）とは，このような素粒子反応を記述する数学的手法を与える．ひと口に場の理論といっても，さまざまなタイプのものがあり，それぞれの理論は対称性によって特徴づけられる．たとえば，電磁相互作用を記述するマクスウェルの理論は $U(1)$ ゲージ対称性をもち，重力相互作用を記述するアインシュタインの一般相対論は，一般座標変換の下での不変性をもっている．共形場の理論を特徴づける対称性は，大まかに言えば，時空座標の局所的なスケール変換の下での不変性である．具体的に説明しよう．d 次元の時空の座標 r_μ（$\mu = 1, 2, \cdots, d$）を $r_\mu \to \lambda r_\mu$（λ は定数）とする座標変換を，λ が r_μ に依存せず至る所で一定なので，一様なスケール変換とよぶ．これに対して，λ が r_μ に依存する場合が局所的な変換となる．とくに，共形変換は，時空内の2本の曲線がある点で交わるとき，その交わりの角を不変に保つ局所的なスケール変換である．$d = 2$ の場合，これは複素平面の等角写像に他ならない．この共形変換の下での不変性が**共形不変性**（conformal invariance）である．

1.2　臨界現象とくり込み群

共形不変性のもつ物理的意義は，格子統計系における2次相転移の臨界現象の考察において明らかになる．イジング模型に代表される強磁性系では，低温の秩序相（熱ゆらぎが抑えられ，スピンの向きがそろい磁性を示す）から高温の無秩序相（熱ゆらぎが勝って，スピンの向きはバラバラになる）への2次相転移が，ある臨界温度で起こる．臨界点では，格子上で互いに離れた位置にある二つのスピンの相関の広がりを示す相関距離 ξ が無限大になり，熱力学関数は臨界指数で特徴づけられる特異性を示す．無限大の長さをもつ距離は，いかなる（有限の）尺度をもつ物差しで測っても，やはり無限大である．したがって，ありとあらゆるスケール（尺度）が等価となり，臨界点直上の系はスケール不変性をもつことになる．すなわち，臨界点では，すべての波長のゆらぎが等しい重みで寄与しており，このような事情が臨界現象の物理を豊かにするとともに，その解析を困難なものとした．この臨界現象の解明は20世紀後半の物理の中心テーマのひとつとなった．

そして，Kadanoff の洞察を経て，1971年に Wilson により提唱されたくり込み群の理論は，臨界現象や場の量子論の物理の本質を鮮やかにあぶり出してみせた [3]．くり込み群の理論の出現により，臨界現象におけるスケーリング則や普遍性（universality）を理解するための理論的な基礎概念が整備され，さらにミクロな系のハミルトニアンから出発して，臨界指数を求めるための手順も与えられた．

格子上のスピン系を考えよう．格子間隔 a を，ひとまずこの系のもつ長さのスケールとみなすことは自然である．a を微視的（ミクロ）な長さのスケールとよぶ．これに対して，巨視的（マクロ）な長さのスケールは相関距離 ξ によって与えられる．すでに述べたように，臨界点近傍では $\xi \gg a$ となるので，これが巨視的スケールとよぶ理由である．また，ξ はスピン系のハミルトニアン $\mathscr{H}$ が記述する力学を反映する物理量なので，系の物理的スケールである．臨界現象を理解するためには，$a < r < \xi$ $(\to \infty)$ にあるすべての長さの

スケール r のゆらぎを問題にしなくてはならない．そこで，定数 $b>1$ として，$a<r<ba$ にあるスピン系の自由度について状態和をとる．その結果，ミクロな系のスケールを ba とする新しいハミルトニアン $\mathscr{H}'$ が得られる．このとき，$\mathscr{H}$ と $\mathscr{H}'$ は同じ対称性をもつが，$\mathscr{H}'$ は $\mathscr{H}$ に比べてより複雑なスピン間相互作用を含んでいる．ただし，この操作の下で分配関数は不変である．このような操作は**くり込み変換**とよばれ，これを繰り返し応用することにより ξ のスケールの物理を記述するためのハミルトニアン $\mathscr{H}_\xi$ を求めようというのが，くり込み群の方法である．すなわち，スケール変換を逐次行なっていくわけであるが，その都度サブスケールのゆらぎを取り込むところにスピン系のもつ力学的特性や対称性が効いてくるのである．

さて，スピン系が臨界点直上にあるとしよう．ここで，くり込み変換を逐次実行していくと，スケール不変性のために，最終的にはくり込み変換に対して不変なハミルトニアン $\mathscr{H}_*$ が得られる．この $\mathscr{H}_*$ をくり込み群の固定点ハミルトニアンとよぶ．$\xi\to\infty$ なので，物理的スケールからみると格子間隔 a は，限りなくゼロに近い．したがって，固定点ハミルトニアン $\mathscr{H}_*$ をもつ理論は，連続時空上のスケール不変な場の理論である．この場の理論を**固定点理論**とよぶ．

臨界現象では，たとえば，ある次元のスピン系が Z_2 対称性（スピンの向きの上下を入れ替える変換に対する不変性）をもっていれば，ハミルトニアンの形が少々違っていようが，格子の形状が異なっていようが，臨界現象を特徴づける臨界指数の値は等しくなるという普遍性が成り立つことが知られている．（本当はもう少し条件を正確に述べる必要がある．）すなわち，微視的レベルの本質的でない情報はくり込み変換の過程で失われ，$\mathscr{H}_*$ にはユニバーサリティを特徴づける本質のみが反映されるのである．これによると，Z_2 対称性と Z_3 対称性をもつ系とではユニバーサリティ・クラスが異なり，対応する $\mathscr{H}_*$ も違う形をしている．

1.3 固定点の理論と共形不変性

固定点ハミルトニアンで記述される理論は，どのような対称性をもっているだろうか．まず，臨界系の特徴としての（a）スケール不変性がある．これは，具体的にはハミルトニアンが質量次元をもつパラメーターを含まないことを意味する．また，臨界系が一様，等方であると仮定することは十分一般的である．すると，固定点理論は（b）並進不変性と（c）回転不変性をもつ．さらに，（d）ミクロな系の相互作用は近距離型であるとしよう．（a）より，固定点理論は一様なスケール変換に対して不変であることになるが，これに（b），（c），（d）を加味すると，より大きい対称性である共形不変性を実現するものと考えられる．すなわち，固定点の理論は，共形不変性をもった共形場の理論である．このことは時空の次元によらずに成り立つとみなしてよい．このアイデアは，1970年の Polyakov の論文で発表され，共形不変性を仮定することにより，任意の次元において2点および3点相関関数のかたちが決まることが示された．しかし，2次元時空の場合は特別に面白く，後述のように，共形対称性が無限次元対称性となるのである．

このように，共形場の理論は固定点を記述するので，臨界現象のユニバーサリティ・クラスについての考察を共形場の理論を用いて行なうことが可能になる．これまで，格子スピン系を例にとって，統計力学の側から説明してきたが，素粒子物理学の立場からもう一度見直しておこう．連続時空上の場の理論を用いて量子補正を計算すると，紫外発散が不可避的に現れる．これを制御するために，適当な長さのスケールをあらかじめ入れておいて理論を定義しておく必要がある．この手続きを「正則化」(regularization) とよぶ [4]．正則化にはいろいろな方法があるが，そのひとつは連続時空のかわりに格子時空をもってきて，その上で場の理論を定式化する方法である．その典型例としての格子ゲージ理論はよく知られている．このとき，格子間隔 a が正則化のためのスケールである．この格子上の場の理論が2次相転移をもてば，そこで連続極限 $a \to 0$ をとることにより，連続時空の場の理論を構成するこ

とができる．この過程は，格子上のスピン系から固定点理論を導くことと物理的に同等である．このように，2次相転移の臨界現象を通して，素粒子物理学，統計物理学，さらに物性物理学は不可分に結びついている [5]．そこで鍵となる事実がユニバーサリティ・クラスの存在であり，それぞれのユニバーサリティ・クラスはその固定点理論，すなわち共形場の理論に代表されるのである．

共形場の理論は，たとえるならば一本の木の幹である．幹から伸びるいく枚もの葉に彩られた枝をもって，一本の木は堂々とした，あるいは美しい姿を形づくる．同じように，共形場の理論に枝葉をつけることにより，場の理論のより豊かな構造が見えてくる．「枝葉をつけること」とは，スケール不変性を破る摂動をかけて，共形場理論を変形してみることである．このとき，共形場理論がどのような理論へ移行していくかを調べる問題が共形場理論の変形問題である[1)]．ひとつのユニバーサリティ・クラスを代表する場の理論を一本の樹木とみなすとき，それらが無数に集まってできる森林を眺めることは，さまざまな場の理論全体をひとまとめにして，「場の理論を要素とする空間」を考察することになぞらえることができよう．このような空間は「理論空間」(theory space) とよばれたりするが，変形問題の研究では，この理論空間に構造をもたせることが可能かどうかを明らかにすることが重要である．

変形問題について格子上のスピン系の観点からの説明をしておく．スピン系が温度 $T=T_c$ で臨界点にあるならば，T の値を T_c から少しずらす．すると，相関距離 ξ は有限になるが，格子間隔 a よりははるかに大きいであろう．ここで，積 ξa が有限の一定値に収束するように，二つの極限 $T\to T_c$, $a\to 0$ を同時にとる．このような極限を**スケーリング極限**とよぶ．極限 $a\to 0$ をとるので，連続時空の場の理論が得られるが，この理論は有限の質量

1) 共形不変性を保つ変形（マージナル変形）を許す共形場理論のクラスも存在する．その場合，変形問題は共形場理論の「モジュライ問題」とよばれ，やはり重要なテーマである．

$$m = \lim_{T\to T_c,\, a\to 0} (\xi a)^{-1} \tag{1.1}$$

をもつ．このようにして現れる有質量の理論が，共形場の理論を変形して得られる場の理論の一例である．3節で，イジング模型のスケーリング極限として，有質量のフェルミオン場の理論を導いてみる．

2° 2次元共形場の理論

d 次元ユークリッド空間の計量 $ds^2 = dr_\mu dr_\mu$（繰り返し添え字については和をとる）が座標変換 $r_\mu' = r_\mu'(r)$ の下で

$$ds^2 \longrightarrow ds'^2 = \rho(\mathbf{r})ds^2 \tag{2.1}$$

のように局所的なスケール因子 $\rho(\mathbf{r})$ だけ変化するとき，このような座標変換を**共形変換**とよぶ．とくに，無限小共形変換 $r_\mu' = r_\mu + \varepsilon_\mu$ は

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d}\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda \varepsilon_\lambda \tag{2.2}$$

をみたす $\varepsilon_\mu(\mathbf{r})$ が与える．ただし，$\partial_\mu = \partial/\partial r_\mu$．

$d=2$ の場合，複素座標 $z = r_1 + ir_2$，$\bar{z} = r_1 - ir_2$ を用いると（2.2）は

$$\partial_{\bar{z}}\varepsilon = 0, \qquad \partial_z \bar{\varepsilon} = 0 \tag{2.3}$$

となる．ただし，$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$，$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2$ とした．（2.3）は複素関数論で出てきたコーシー - リーマンの方程式で，これより $\varepsilon = \varepsilon(z)$，$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\bar{z})$ を得る．したがって，2次元空間の共形変換は任意の解析（反解析）関数 $w(z)$（$\bar{w}(\bar{z})$）から

$$z \longrightarrow w = w(z), \qquad \bar{z} \longrightarrow \bar{w} = \bar{w}(\bar{z}) \tag{2.4}$$

によって与えられる．無限小共形変換を

$$z \longrightarrow z + \varepsilon(z), \qquad \varepsilon(z) = \sum_{n\in \boldsymbol{Z}} \varepsilon_n z^{n+1} \quad (\varepsilon_n \ll 1) \tag{2.5}$$

とすると，その生成子は

$$l_n = -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad n \in \boldsymbol{Z} \tag{2.6}$$

となる．これらは，交換関係

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n}, \qquad [\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m-n)\bar{l}_{m+n},$$
$$[l_m, \bar{l}_n] = 0 \tag{2.7}$$

をみたす．すなわち，無限小変換の生成子 l_n は無限次元のリー代数を構成する．これがセントラルチャージ（後述）のない場合の**ヴィラソロ代数**（Virasoro algebra）である．以下では，2次元に話を限定し，2次元共形場の理論を **CFT** と略記することにしよう．

CFT では，ヴィラソロ生成子はエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}(\mathbf{r})$（$\mu, \nu = 1, 2$）からつくられる演算子である．$T_{\mu\nu}$ は対称テンソルであり，スケール不変な理論では，その対角和 $T_{11}+T_{22}=0$ となる．したがって，独立な成分は2成分となり，それらを $T, \overline{T}$ と記すと，連続の方程式は

$$\partial_{\bar{z}} T = 0, \qquad \partial_z \overline{T} = 0 \tag{2.8}$$

と表される．よって，$T = T(z)$，$\overline{T} = \overline{T}(\bar{z})$ となり，正則，反正則成分に分離する．ヴィラソロ生成子 L_n，$\overline{L}_n$（$n \in \boldsymbol{Z}$）は，正則および反正則カレントのモーメントとして，

$$L_n = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \qquad \overline{L}_n = \oint_C \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{n+1} \overline{T}(\bar{z}) \tag{2.9}$$

により与えられる．ここで，C は $z=0$ を回る積分路である．L_n はヴィラソロ代数

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \tag{2.10}$$

をみたす．$\overline{L}_n$ についても同様である．ただし，$[L_m, \overline{L}_n] = 0$．ここで，$c$ は**セントラルチャージ**とよばれる重要なパラメーターで，後でみるように，ひとつひとつの CFT を特徴づける値をとる．このヴィラソロ代数を用いて，CFT を完璧に定式化した論文が，1984年に Belavin, Polyakov, Zamolodchikov によって発表された [1]．この論文は，場の理論を系統的に見渡すグローバルな視点というものが存在することを具体的に示したという意味でも画期的

であったと思う．まさに記念碑的と形容するにふさわしい，すばらしい論文である．

さて，CFT には臨界現象の長波長のゆらぎを表す場（スケーリング演算子）が一般に無限個存在する．そのうち共形変換（2.4）に対して，複素 $(\Delta, \bar{\Delta})$ テンソルとして

$$\phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{\Delta}\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}} \tilde{\phi}(w, \bar{w}) \tag{2.11}$$

のように変換する場が要となる役割を果たす．このような場を**プライマリー場**と定義する．一様なスケール変換の場合，（2.11）は

$$\phi(z, \bar{z}) = \lambda^{\Delta+\bar{\Delta}} \tilde{\phi}(\lambda z, \lambda \bar{z}) \tag{2.12}$$

となる．ここに現れる指数 $x=\Delta+\bar{\Delta}$ は，場 ϕ のスケーリング次元とよばれる臨界指数で，臨界現象において物理量が示す特異性を決めるたいへん重要なものである．また，$\Delta, \bar{\Delta}$ は共形次元とよばれ，ϕ の２点相関関数

$$\langle \phi(z, \bar{z}) \phi(z', \bar{z}') \rangle = \frac{1}{(z-z')^{2\Delta}(\bar{z}-\bar{z}')^{2\bar{\Delta}}} \tag{2.13}$$

のベキ的（power law）な減衰を決定する．

プライマリー場 ϕ は，ヴィラソロ代数の表現において最高ウェイト状態を与える．すなわち，ϕ に対応する状態を $|\phi\rangle$ とすると，

$$\begin{aligned} L_0|\phi\rangle &= \Delta|\phi\rangle, & L_n|\phi\rangle &= 0, \\ \bar{L}_0|\phi\rangle &= \bar{\Delta}|\phi\rangle, & \bar{L}_n|\phi\rangle &= 0, \end{aligned} \qquad n>0 \tag{2.14}$$

が成り立つ．この $|\phi\rangle$ と，$L_{-n}, \bar{L}_{-n}$ $(n>0)$ を $|\phi\rangle$ に次々と作用させてできる無限個の状態は，共形族 $[\phi]$ を構成する．ある一定の手続きを経ると，$[\phi]$ はヴィラソロ代数の既約表現となる．これは無限次元表現であることに注意したい．この共形族を用いると，CFT に含まれる場の全体 $\{\mathscr{A}_j\}$ は，

$$\{\mathscr{A}_j\} = \bigoplus_{\alpha} [\phi_\alpha] \tag{2.15}$$

と既約分解される．この結果は強烈である．$\{\mathscr{A}_j\}$ は無限次元の空間であるが，

その無限自由度をヴィラソロ代数の表現論を用いてコントロールすることができたのだ．まさに無限次元代数としてのヴィラソロ代数の威力である．

ユニタリ条件を満たし $c<1$ となる CFT の系列は，ユニタリ離散系列として知られている．そのセントラルチャージは，

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}, \qquad p = 2, 3, 4, \cdots \tag{2.16}$$

となり，また共形次元は

$$\Delta_{rs} = \frac{(r(p+1)-sp)^2-1}{4p(p+1)}, \qquad 1 \leq r \leq p-1, \quad 1 \leq s \leq p \tag{2.17}$$

で与えられる．共形不変性に，さらに超対称性や Z_n 対称性，あるいはカレント代数の対称性を加えることにより，多様な CFT の離散系列が構成されることが知られている．

3°　2次元イジング模型

この節では，1節で述べた格子スピン系と CFT との関係を具体的に調べる．文献［6］に従って，イジング模型を少し詳しく解析してみよう．

3.1　イジング・フェルミオン

2次元正方格子上のイジング模型のハミルトニアンは

$$\mathscr{H} = -J\sum_{\mathbf{x}}\sum_{i=1}^{2}\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}+\mathbf{a}_i) - H\sum_{\mathbf{x}}\sigma(\mathbf{x}), \qquad J>0 \tag{3.1}$$

である．格子点 $\mathbf{x}$ 上のスピン変数は $\sigma(\mathbf{x}) = \pm 1$ の値をとり，$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ は正方格子の単位ベクトル，H は外部磁場である．$H=0$ のとき，このハミルトニアンは $\sigma(\mathbf{x}) \to -\sigma(\mathbf{x})$ で生成される Z_2 対称性をもっている．分配関数は

$$Z = \sum_{\{\sigma(\mathbf{x})=\pm 1\}} e^{-\beta\mathscr{H}} \tag{3.2}$$

で与えられ，$\beta = 1/T$（T は温度，ボルツマン（Boltzmann）定数＝1）とお

いた．イジング模型は $(T,H)=(T_c,0)$ において2次相転移を起こすことが知られている．T_c の値は後で決めてみせる．

臨界点直上では，2点相関関数の次のような漸近形が知られている，

$$\langle\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{y})\rangle\simeq\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1/4}},\qquad\langle\varepsilon(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{y})\rangle\simeq\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{2}}.\tag{3.3}$$

ただし2点間の距離 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ は格子間隔より十分大きい．この相関関数は格子上で定義されたミクロな変数 $\sigma(\mathbf{x})$，$\varepsilon(\mathbf{x})\equiv\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}+\mathbf{a}_i)$ がくり込まれてできるスケーリング演算子 $\sigma(z,\bar{z})$，$\varepsilon(z,\bar{z})$ の相関関数とみなせる．(3.3) より σ,ε のスケーリング次元が $x_\sigma=1/8$, $x_\varepsilon=1$ と読める．ここで σ は Z_2 odd, ε は Z_2 even の場であり，各々，磁気演算子，エネルギー演算子とよばれる．以下でみるようにイジング模型の臨界現象は $c=1/2$ CFT で記述され，σ と ε は，各々，共形次元 $\left(\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ をもつプライマリー場であることがわかる．

イジング模型の臨界極限を調べるための第一歩として，双対格子上の無秩序（disorder）変数 μ を導入する．双対格子上の点 $\mathbf{x}_*$ から，パス P を無限遠に伸ばす．このパスは格子上のボンドを横切っていく．P で横切られたすべてのボンドの上では，スピンの近接相互作用の J の符合を $-J$ とおく（図1）．このようなボルツマン重率から決まる，$\mathbf{x}_*$ と P による分配関数を $\tilde{Z}(\mathbf{x}_*;P)$

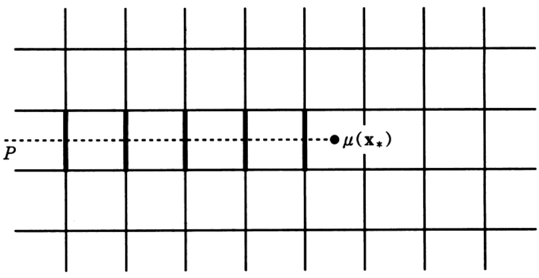


図1　disorder 変数

と書く．これより disorder 変数を

$$\langle \mu(\mathbf{x}_*) \rangle = \widetilde{Z}(\mathbf{x}_*; P)/Z \tag{3.4}$$

によって導入する．2点相関関数は

$$\langle \mu(\mathbf{x}_*)\mu(\mathbf{y}_*) \rangle = \widetilde{Z}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*; P)/Z \tag{3.5}$$

とする．ただし，ここでの P は双対格子点 $\mathbf{x}_*$ と $\mathbf{y}_*$ を結ぶパスである．これを一般化して μ の多点相関関数も定義される．このとき，相関関数は P の形状によらないことに注意する．このことは，2点関数を例にとると，図2のような変数変換を用いてただちに示すことができる．多点の場合も同様である．

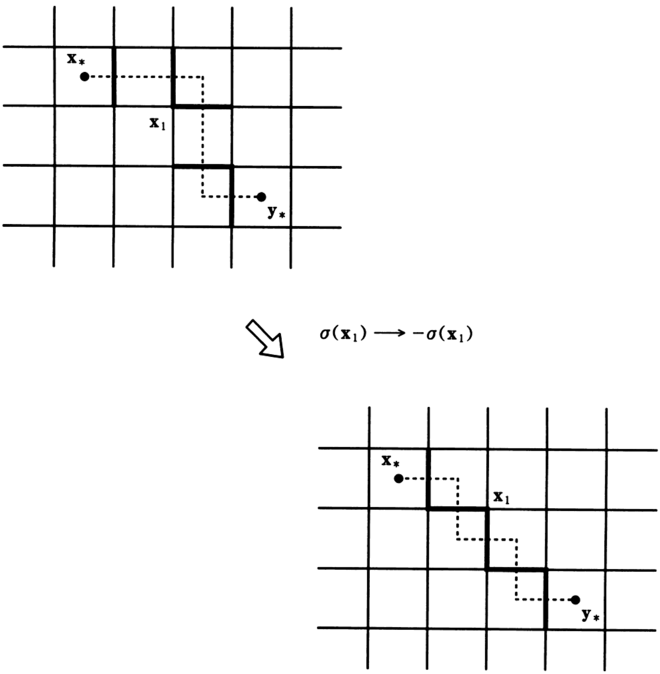


図2　disorder 変数とパスのとり方

disorder 変数の特徴を調べておこう．まず，

$$\lim_{|\mathbf{x}_*-\mathbf{y}_*|\to\infty}\langle\mu(\mathbf{x}_*)\mu(\mathbf{y}_*)\rangle=\langle\mu\rangle^2 \tag{3.6}$$

としよう． $T\to\infty$ では，$\beta=0$ なので（3.5）の分母，分子は等しくなり，$\langle\mu\rangle^2=1$ となる．一方，$T\ll T_c$ では，パス P 上で J の符合が逆になっているため，余分のエネルギーが費やされる．したがって

$$\lim_{|\mathbf{x}_*-\mathbf{y}_*|\to\infty}\langle\mu(\mathbf{x}_*)\mu(\mathbf{y}_*)\rangle\simeq e^{-c|\mathbf{x}_*-\mathbf{y}_*|},\qquad c>0 \tag{3.7}$$

よって，$\langle\mu\rangle=0$ となる．これは $\langle\sigma\rangle$ の温度依存性と正反対の振舞いであり，μ が disorder 変数とよばれる理由である．

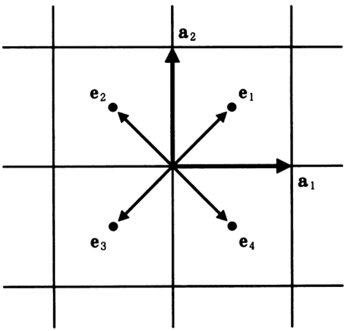


図3　双対格子点

次に，イジング模型におけるフェルミオン変数を導入する．図3のような双対格子点を指すベクトル $\mathbf{e}_\alpha$ $(\alpha=1,2,3,4)$ を用意する．ここで，σ と μ の積から新しい変数

$$\psi_\alpha(\mathbf{x})=\sigma(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}+\mathbf{e}_\alpha),\qquad \alpha=1,2,3,4 \tag{3.8}$$

を定義する．disorder 変数 μ の定義と $\sigma(\mathbf{x})^2=1$ を用いると

$$\begin{aligned}\langle\psi_1(\mathbf{x})\rangle&=\langle\sigma(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}+\mathbf{e}_1)\rangle\\&=\langle\sigma(\mathbf{x})\prod_{n=0}^{\infty}\exp(-2K\sigma(\mathbf{x}-n\mathbf{a}_1)\sigma(\mathbf{x}-n\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2))\rangle\end{aligned}$$

$$= \left\langle \sigma(\mathbf{x}) \prod_{n=1}^{\infty} \exp(-2K\sigma(\mathbf{x}-n\mathbf{a}_1)\sigma(\mathbf{x}-n\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2) \right.$$

$$\left. \times \exp(-2K\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}+\mathbf{a}_2) \right\rangle$$

$$= \left\langle \sigma(\mathbf{x}) \prod_{n=1}^{\infty} \exp(-2K\sigma(\mathbf{x}-n\mathbf{a}_1)\sigma(\mathbf{x}-n\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2) \right.$$

$$\left. \times (\cosh(2K) - \sinh(2K)\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}+\mathbf{a}_2)) \right\rangle$$

$$= \cosh(2K)\langle\sigma(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}+\mathbf{e}_2)\rangle - \sinh(2K)\langle\sigma(\mathbf{x}+\mathbf{a}_2)\mu(\mathbf{x}+\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_3)\rangle$$

$$= \cosh(2K)\langle\psi_2(\mathbf{x})\rangle - \sinh(2K)\langle\psi_3(\mathbf{x}+\mathbf{a}_2)\rangle \tag{3.9}$$

と計算される．ただし，$K=\beta J$ とおいた．同様な計算で，$\alpha=1\sim4$ の場合の結果

$$\langle\psi_\alpha(\mathbf{x})\rangle = \cosh(2K)\langle\psi_{\alpha+1}(\mathbf{x})\rangle - \sinh(2K)\langle\psi_{\alpha+2}(\mathbf{x}+\mathbf{a}_{\alpha+1})\rangle \tag{3.10}$$

が導かれる．ここで，$\mathbf{a}_3=-\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_4=-\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_5=\mathbf{a}_1$ である．また，

$$\psi_{\alpha+4}(\mathbf{x}) = -\psi_\alpha(\mathbf{x}) \tag{3.11}$$

が成り立つことに注意する．これは $\mathbf{e}_\alpha$ の角度 2π の回転に対応しているので，場 $\psi_\alpha(\mathbf{x})$ は空間回転のもとで2価性をもつ．すなわち，$\psi_\alpha(\mathbf{x})$ は格子上のフェルミオン場である．

さて，任意の β に対して期待値 $\langle\psi_\alpha(\mathbf{x})\rangle$ は $\mathbf{x}$-依存性をもつ．しかし，β のある特別な値では $\langle\psi_\alpha(\mathbf{x})\rangle$ が $\mathbf{x}$ によらない一様な値をとり得る．この β の値がイジング模型の2次の相転移点を与える．そこで，(3.11) を考慮して

$$\langle\psi_\alpha(\mathbf{x})\rangle = e^{\pm i\pi\alpha/4} \tag{3.12}$$

とすると (3.10) より

$$\cosh(2K_c) = \sqrt{2}, \qquad \sinh(2K_c) = 1; \qquad K_c = \beta_c J \tag{3.13}$$

となり，臨界点 β_c が求まる．

次に $\beta=\beta_c$ の近傍で，格子間隔 $a=|\mathbf{a}_1|=|\mathbf{a}_2|$ を $a\to0$ にとる極限を調べる．$\psi_\alpha(\mathbf{x})$ を

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})e^{\frac{i\pi}{4}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} + \bar{\psi}(\mathbf{x})e^{-\frac{i\pi}{4}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} + \cdots \tag{3.14}$$

とモード展開する．右辺の … の部分はいまの極限では無視し得る高いスピンのモードの寄与を表す．また，$\overline{\psi}$ は ψ の複素共役を示すものではないので注意したい．(3.14) を (3.10) に代入し，辺々を α について和をとる．たとえば，左辺は

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{4} e^{-\frac{i\pi}{4}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\psi_\alpha(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \tag{3.15}$$

となる．ここで，$\sinh(2K)$，$\cosh(2K)$ を $K=K_c$ のまわりで展開し，また $\psi(\mathbf{x}+\mathbf{a}_i)=\psi(\mathbf{x})+a\partial_i\psi(\mathbf{x})+\cdots$，$\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1,2)$ と展開する．$K-K_c$ と a を同じオーダーの量として展開を進めると

$$\begin{aligned}
&\psi(\mathbf{x})\\
&=\{\cosh(2K_c)+2\sinh(2K_c)(K-K_c)\}e^{\frac{i\pi}{4}}\psi(\mathbf{x})\\
&\quad-\{\sinh(2K_c)+2\cosh(2K_c)(K-K_c)\}e^{\frac{i\pi}{2}}\psi(\mathbf{x})\\
&\quad-\frac{a}{2}\{\sinh(2K_c)+2\cosh(2K_c)(K-K_c)\}e^{-\frac{3\pi i}{4}}\{\partial_1\overline{\psi}(\mathbf{x})-i\partial_2\overline{\psi}(\mathbf{x})\}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

となる．$\overline{\psi}$ についても同様の計算を行ない，(3.13) を代入すると

$$\begin{aligned}
(\partial_1+i\partial_2)\psi &= -im\overline{\psi}\\
(\partial_1-i\partial_2)\overline{\psi} &= im\psi
\end{aligned} \tag{3.17}$$

となってディラック (Dirac) 方程式が導かれる．ただし，m はフェルミオンの質量で

$$m = 4(K-K_c)/a \tag{3.18}$$

により与えられる．ここで格子間隔 a ($\ll 1$) を固定して，$K\to K_c$ をとると $m=0$ となる．こうして，

> 2次元イジング模型は臨界点直上において，質量をもたない自由なフェルミオン場で記述される．

という有名な結果に到達する．この自由フェルミオン理論は質量をもたないので，明らかに共形不変である．その作用積分は

$$S_{CFT} = \int \frac{d^2r}{2\pi}\left(\psi \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi + \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\psi}\right) \tag{3.19}$$

で与えられる．自由場理論なので直接の計算が可能であり，その結果，セントラルチャージは $c = 1/2$ となることが示される．これは，(2.16) の $p = 3$ の場合である．また，スケーリング次元は (2.17) より，$x_\sigma = 2\Delta_{22}$，$x_\varepsilon = 2\Delta_{21}$ となっていることが確かめられる．

3.2　イジング模型のスケーリング極限

以上の議論では，二つの極限 $K \to K_c$，$a \to 0$ を独立にとった．ここでは，K と a を連動させて

$$K - K_c \to 0, \qquad a = \text{const.}(K - K_c) \to 0 \tag{3.20}$$

のような極限を考えてみる．すなわち，臨界極限の速さに応じて連続極限 $a \to 0$ をとると，$m \neq 0$ の場の理論が得られ，有質量をもつフェルミオン場の理論が現れる．その作用積分は

$$S = \int \frac{d^2r}{2\pi}\left(\psi \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi + \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\psi} + im\bar{\psi}\psi\right) \tag{3.21}$$

である．$m \neq 0$ なので，もはやスケール不変性，すなわち共形不変性は失われているが，連続時空上の場の理論として意味をもつ理論が登場した．このように臨界極限と連続極限を連動させるスケーリング極限をとることによって，格子統計模型から有質量の連続的な場の理論を構成する手法は，イジング模型に限らない一般的なものである．しかし，イジング模型の場合，$m \neq 0$ としてもフェルミオンについて自由場の理論なので，相関関数を正確に計算できる．たとえば，簡単な例として

$$\langle \bar{\psi}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\bar{\psi}(0)\psi(0)\rangle = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 \{K_0^2(mR) - K_1^2(mR)\} \tag{3.22}$$

と求まる．ただし，K_i は変形ベッセル関数，$R=|\mathbf{r}|$ である．イジング模型のスケーリング極限は，可解格子模型と有質量場の理論を実際に計算を行なうことにより結びつけることのできる貴重な例となっており，そこには深い数学的構造が隠されている．さらに興味ある読者のためには，文献［7］を薦めておこう．

さて，自由場の理論は可積分場の理論の顕著な例である．そこで

イジング・フェルミオンの質量項に対応するような摂動項を一般の CFT に見いだし，そのスケーリング極限として2次元有質量の可積分場の理論を構成できるか？

という問題が現れる．これが Zamolodchikov によって提起された CFT の変形問題である［8］．(3.21) において，$i\bar{\psi}\psi$ はイジング模型のエネルギー演算子

$$\varepsilon(z,\bar{z}) = i\bar{\psi}(\bar{z})\psi(z) \tag{3.23}$$

に他ならない．これは共形次元 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ をもつスカラー演算子で，スケーリング次元は $x_\varepsilon=\frac{1}{2}\times 2=1$ である．また，(3.21) の最初の2項は (3.19) の S_{CFT} なので，質量 m はエネルギー演算子による S_{CFT} からの変形のパラメーターである．そこで，一般に

$$S=S_{CFT}+\lambda\int d^2r\phi(\mathbf{r}) \tag{3.24}$$

を考察することができる．S_{CFT} の具体形は不要である．有質量の理論を得るには，ϕ のスケーリング次元は $x_\phi<2$ でなければならない．よって，変形のパラメーター（ないし結合定数）λ は，次元 $2-x_\phi$ をもち，$\lambda\neq 0$ でスケール不変性が破れる．2次元の場合，値が2より小さいスケーリング次元をもつ場は **relevant** な場とよばれる．問題の第一の焦点は，可積分変形をもたらすよ

うな relevant な場 ϕ を CFT のスペクトルに見つけられるかどうかである.

4° CFT の可積分変形

4.1　(1, 3) 演算子の役割

ユニタリ離散系列においては，すべてのプライマリー場が $\Delta=\bar{\Delta}$ の共形次元をもつ「対角型」の CFT の存在が知られている．スケーリング次元は $x_{rs}=\Delta_{rs}+\bar{\Delta}_{rs}=2\Delta_{rs}$ で，対応するプライマリー場を ϕ_{rs} と書く．このとき，

$$0<x_{22}<x_{33}<\cdots<x_{p-1,p-1}<x_{21}<\cdots<x_{p-1,p-2}<2 \qquad (4.1)$$

が成り立ち，これが対角型理論の relevant なプライマリー場のスペクトルである．この CFT は Z_2 対称な $(p-1)$-重の多重臨界現象を記述している．著しいことに，まさにこの臨界現象を示す可解格子統計模型がつくられている．この模型は1984年に Andrews, Baxter, Forrester (ABF) により提出された [9]．これは SOS 模型の一種で，正方格子の各格子点 i には，$l_i=1,2,\cdots,p$ $(p\geq 3)$ なる“高さ変数”が定義され，隣接する格子点 i と j においては制限 $|l_i-l_j|=1$ が課されている．ボルツマン重率は，格子上の各単位セルについて定義されており，これが有名なヤン-バクスター (Yang-Baxter) 方程式の楕円関数型の解になっている．その結果，この模型は臨界点からはずれた (off-critical) パラメーター領域でも可解性をもっている．$t=0$ を $(p-1)$-重臨界点とすると，$f\sim t^{2-\alpha}$ で定義される自由エネルギー密度 f の臨界指数 α は，ABF によって

$$2-\alpha=\frac{p+1}{2} \qquad (4.2)$$

と求められた．これより，スケーリング関係式

$$x=\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \qquad (4.3)$$

を使って，t に共役な場の演算子 ϕ のスケーリング次元 x が求められる．(4.2)

を代入してみると

$$x = \frac{2(p-1)}{p+1} = 2\Delta_{13} \tag{4.4}$$

となって，ちょうどユニタリ離散系列の (1, 3) 演算子 ϕ_{13} の共形次元と一致する (折り返しの対称性 $\Delta_{13} = \Delta_{p-1,p-2}$ に注意)．また，1 点関数から求められるスケーリング次元もすべて (2.17) と一致しており，ABF 模型の臨界現象が対角型のユニタリ離散系列で記述されることがわかった．さらに，ABF 模型における off-critical 領域の可解性と照らし合わせると，(3.24) の ϕ として ϕ_{13} を用いれば，ユニタリ離散系列から可積分場の理論が系統的に構成されるのではないかという期待が生まれてくる．

4.2 可積分変形と高次保存量

2 次元の可解格子模型や可積分場の理論には，通常のエネルギー，運動量に加えて，無限個の保存量が存在する．対応するカレントは，高階のテンソル構造 (高いスピン) をもち，複素テンソルの表示を用いれば $(J_{z\cdots}(z,\bar{z}), \bar{J}_{\bar{z}\cdots}(z,\bar{z}))$ と表される．カレントの保存を示す連続の式は

$$\partial_{\bar{z}} J_{z\cdots} = \partial_z \bar{J}_{\bar{z}\cdots} \tag{4.5}$$

である．保存量は

$$P_{z\cdots} = \oint (J_{z\cdots} dz + \bar{J}_{\bar{z}\cdots} d\bar{z}) \tag{4.6}$$

となる．エネルギー・運動量テンソルの連続の式

$$\partial_{\bar{z}} T(z,\bar{z}) = \partial_z \Theta(z,\bar{z}), \qquad \partial_z \overline{T}(z,\bar{z}) = \partial_{\bar{z}} \Theta(z,\bar{z}) \tag{4.7}$$

は，エネルギー，運動量の保存を与える．CFT では $\Theta = 0$ なので，T と $\overline{T}$ が，各々，正則，反正則の演算子 $T(z)$，$\overline{T}(\bar{z})$ になった．そこで，T と $\overline{T}$ から複合演算子 $(T(z))^n$，$(\overline{T}(\bar{z}))^n$ $(n = 2, 3, \cdots)$ をつくってみる．ただし，2 個の演算子 $A(z)$，$B(z)$ の同一時空点上の積は

$$(AB)(z) = \oint_C \frac{dw}{2\pi i} \frac{A(w)B(z)}{w-z} \tag{4.8}$$

で定義する．積分路 C は $w=z$ のまわりを回る．3個以上の積は，この公式を繰り返して用いればよい．そうすると，これら複合演算子もまた連続の方程式

$$\partial_{\bar{z}}(T(z))^n = 0, \qquad \partial_z(\overline{T}(z))^n = 0 \tag{4.9}$$

をみたすので，CFT には無限個の高次保存量が内在している．すなわち，CFT はスケール不変な2次元可積分場の理論である，と特徴づけることもできよう．

CFT を (3.24) のように変形すると，一般にこれら高次の保存量は失われてしまう．しかし，可積分変形のもとでは高次の保存量が保たれるのである．その様子を摂動論を用いて調べてみよう．$T_s(z)$ をスピン s の正則保存カレントとすると，off-critical 領域で $T_s(z)$ は，変形パラメーター λ について摂動展開される．すなわち

$$\langle T_s(z, \bar{z})X\rangle = \langle T_s(z)X\rangle_{CFT} + \lambda\int d^2w\langle T_s(z)\phi(w, \bar{w})X\rangle_{CFT} + \cdots \tag{4.10}$$

となる．ここで $\langle\cdots\rangle_{CFT}$ は，CFT による相関関数の評価を意味する．したがって

$$\partial_{\bar{z}}T_s(z, \bar{z}) = \lambda A_{s-1}^{(1)}(z, \bar{z}) + \lambda^2 A_{s-1}^{(2)}(z, \bar{z}) + \cdots \tag{4.11}$$

となる．ただし，$A_{s-1}^{(n)}$ は n 次の摂動に現れるスピン $(s-1)$ の演算子である．1次の摂動に注目しよう．演算子積展開

$$T_s(z)\phi(w, \bar{w}) = \sum_{n=2}^{s}\frac{R_n(w, \bar{w})}{(z-w)^n} + \frac{R_1(w, \bar{w})}{z-w} + \text{非特異項} \tag{4.12}$$

とデルタ関数の公式を用いると

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}}\int d^2w\langle T_s(z)\phi(w, \bar{w})X\rangle_{CFT}\\
&= \int d^2w\,\partial_{\bar{z}}\sum_{n=1}^{s}\frac{1}{(z-w)^n}\langle R_n(w, \bar{w})X\rangle_{CFT}\\
&= \int d^2w\,\delta^{(2)}(z-w)\\
&\quad\times\left\langle\left(R_1(w, \bar{w}) + \sum_{n=2}^{s}(-1)^{n-1}(n-1)!\,\partial_w^{n-1}R_n(w, \bar{w})\right)X\right\rangle_{CFT}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

を得る（途中で部分積分を使った）．これより

$$\partial_{\bar{z}} T_s(z, \bar{z}) = \lambda R_1(z, \bar{z}) + \partial_z \left(\lambda \sum_{n=2}^{s} (-1)^{n-1} (n-1)! \partial_z^{n-2} R_n(z, \bar{z}) \right) \quad (4.14)$$

となる．したがって，もし

$$R_1(z, \bar{z}) = \partial_z(\cdots) \quad (4.15)$$

のように表されれば

$$\partial_{\bar{z}} T_s(z, \bar{z}) = \partial_z \Theta_{s-2}(z, \bar{z}) \quad (4.16)$$

とまとまり，(T_s, Θ_{s-2}) は off-critical 領域の高次の保存カレントになる．問題のポイントは，ϕ による摂動のもとで（4.15）の形をもつ $T_s(z)$ が存在するか否かである．

4.3 （1, 3）変形と高次保存量

前節で述べた方針で（1, 3）演算子 ϕ_{13} による変形を詳しく調べてみると，（1, 3）変形は可積分変形となることがほぼ明らかにされる．（1, 3）演算子以外にも可積分変形の可能性があり，たとえば，（1, 2）演算子による変形の場合も off-critical の保存量を構成できる．可積分変形となるための必要条件をチェックするアルゴリズムを使って計算した結果をまとめると

表 1

p	モデル	ϕ	保存量のスピン
3	A	(1, 3)	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30
3	A	(1, 2)	2, 8, 12, 14, 18, 20
4	A	(1, 3)	2, 4, 6, 8, 10, 12
4	A	(1, 2)	2, 6, 8, 10, 12, 14
5	A	(1, 3)	2, 4, 6, 8
5	D	(2, 1)	2, 3, 5, 6, 8, 9
6	A	(1, 3)	2, 4, 6, 8
6	D	(1, 2)	2, 5, 6, 8, 9, 12

のようになる．ここでモデルの欄の「A」は先に述べた対角型の CFT を示し，「D」は非対角型を示す．$p=5,6$ の「D」型モデルは，3-state Potts 模型，tri-critical 3-state Potts 模型を記述する．著しいことに，表1に現れた保存カレントのスピンの値は，次の表2にあげるリー環の指数（Coxeter exponent）とよばれる数に，コクセター（Coxeter）数を法として対応している．

表2

リー環	指　数	コクセター数
A_1	1	2
A_2	1, 2	3
E_6	1, 4, 5, 7, 8, 11	12
E_7	1, 5, 7, 9, 11, 13, 17	18
E_8	1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 30	30

ここで，たとえば，例外型のリー環 E_8 の指数に1を足したものは，ちょうど $p=3$ CFT の (1, 2) 変形にみられるスピンに一致している．$p=3$ CFT はイジング模型であり，(1, 2) 変形は磁気オペレータ σ による変形に他ならない．すなわち，イジング模型で $T=T_c$ として，外部磁場 H をスイッチ・オンしているわけである．保存量の考察の結果は，この系が可積分場の理論であることを示唆している．$H\neq 0$ ではイジング模型が可解でないことはよく知られているが，CFT の変形の観点でみると，可積分場の理論が現れ，さらに驚くべきは，それが何やらリー環 E_8 にも関係しているという事実である．これは，最初に Zamolodchikov (1989年) により指摘された．さらに，保存量の構成，および CFT の自由場表示，コセット構成法の観点から，Eguchi と Yang によりアフィン Toda 場の理論との関係が見いだされた (1989年)．可積分変形のもとで off-critical 保存量が一般に無限個存在することの数学的証明は，アフィン・リー環のコホモロジー理論の手法を使って Feigin と

Frenkel が与えた (1991年).

5° おわりに

CFT の基本から始めて，可積分変形までをかけ足でまとめてみた．ここで取り上げたのは，主に1984年から1990年ごろまでに明らかにされた内容である．続く5節以降には，まず，CFT から得られた可積分場の理論における因子化 S 行列の構成が議論されるであろう．さらに，この S 行列を用いた熱力学ベーテ仮説法の定式化という重要な話題もある．

1984年の CFT の出現以前は，可積分場の理論は特別なクラスの場の理論の模型として位置づけられ，個別的な研究の対象であった．しかし，CFT が現れてからの10年間，ヴィラソロ代数を中心とする無限次元対称性は，可積分場の理論の系統的，代数的研究の大きな推進力となり，我々にさまざまなアイデアと知識をもたらした．そして，現在の研究の中心テーマのひとつは，off-critical 領域の可積分性を支配する無限次元対称性の探求であり，場の理論および表現論の双方の立場で活発に研究が進められている．

このような CFT の研究の進展と並行して，場の理論の可積分性について，まったく新しい方向での発展があった．解ける場の理論は2次元に限ると思われていたが，1994年に Seiberg と Witten により4次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論にも可解構造があることが発見された [10]．この可解性は，従来の2次元の場合とはだいぶ様子が異なり，ストリング双対性を通して複素多様体の幾何学と本質的に関連があるようにみえる．筆者は，このような高次元理論の可解性の背後にはストリング理論の構造が潜んでいて，やはり2次元の理論が根底にあることにより理解できるのではないかと予想している．Seiberg-Witten の仕事には，旧来の場の理論の枠組みにとらわれない自由な発想があり，それは1984年以来の CFT の研究で培われた非摂動的場の理論に関する新しい精神を反映しているように思われる．

参考文献

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241** (1984), 333.

日本語の詳細なテキストとして,

[2] 川上則雄・梁 成吉, 共形場理論と1次元量子系, 岩波書店, 1997.

[3] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*, Cambridge Univ. Press, 1996.

より詳しくは, たとえば

[4] 九後汰一郎, ゲージ場の量子論I, II, 培風館, 1989.

少し古いが, この方面の優れた入門的文献として,

[5] J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979), 659.

[6] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, Harwood Academic Publishers, 1987.

[7] 神保道夫, ホロノミック量子場 (現代数学の展開4), 岩波書店, 1998.

[8] A. B. Zamolodchikov, *Adv. Stud. Pure Math.* **19** (1989), 1.

[9] G. E. Andrews, R. J. Baxter and P. J. Forrester, *J. Stat. Phys.* **35** (1984), 193.

[10] N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B426** (1994), 19 ; *Nucl. Phys.* **B435** (1995), 129.

場の理論におけるヤンギアン対称性

中西知樹

ここでは量子群の典型例であるヤンギアン（Yangian）が2次元可積分場の理論の対称性として自然に現れることを説明します．この話の要点は

ヤンギアンの表現論とヤンギアン対称性をもつ場の理論は表裏一体である

という点にあります．

1° Yangian とは何か？

“ヤンギアン（Yangian）”という単語をおそらく初めて聞くみなさんは，一体どのようなものを想像するでしょうか？“ian”という接尾語は，ふつう Hamiltonian, Lagrangian, Laplacian などの作用素，あるいは Jacobian, Wronskian などのある種の関数を表すのに使われます．ですから，「ヤンギアンもある種の作用素か量であろう」と思うのが自然なのですが，その予想に反して，実は

ヤンギアンは複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の代数である．

ここで，$\boldsymbol{C}$ 上の代数（algebra，多元環ともいう）とは，$\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間の構造と環の構造を同時にもつものでした．ヤンギアンという代数の定義と名称を与えたのは Drinfel'd [4] で，この代数が Yang の R 行列と関連していることからこの名がつけられました．Yang は，パリティー非保存やヤン-ミルズ理論でも有名なあの物理学者 C.N. Yang です．

もう少し細かく言うと，$\mathbf{C}$ 上の任意の有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$（A 型から G 型まであります）に対して，対応するヤンギアン $Y(\mathfrak{g})$ が存在します．たとえば $\mathfrak{g}=sl_2$ のとき，$Y(\mathfrak{g})$ を sl_2 ヤンギアン，A_1 型ヤンギアンなどともいいます．単にヤンギアンというときには，これらをすべて総称するときもあれば，$\mathfrak{g}$ を一つ固定して対応する $Y(\mathfrak{g})$ を指すこともあります．

話を変えて，量子群について述べましょう．これもややこしい話ですが，ここで量子群とよぶものは，その名に反し「群」ではなく「代数」なのです[1]．どのような代数を量子群とよぶかについて，実は，明確な定義はまだないのですが[2]，ここでは次のように考えます．

量子群とは R 行列をもつ非余可換なホップ（Hopf）代数のことである．

定義に現れた用語の意味を順番に説明しましょう．まず，**ホップ代数**とは，ごくおおざっぱに言うと，余積（comultiplication）とよばれる準同型写像 $\Delta: A \to A\otimes A$ をもつ結合代数のことです．ホップ代数 A が作用するベクトル空間（$=A$ の表現空間）を A 加群（A-module）といいます．任意の二つの A 加群 M_1, M_2 のテンソル積 $M_1\otimes M_2$ に対して，A の元 a の作用を $\Delta(a)$ により与えることができます．また，ホップ代数 A が**非余可換**（non-cocommutative）であるとは，上のテンソル積上の A 加群の構造が左右非対称であること，すなわち自然な写像

$$\begin{aligned} \sigma: M_1\otimes M_2 &\longrightarrow M_2\otimes M_1 \\ v\otimes w &\longmapsto w\otimes v \end{aligned} \tag{1.1}$$

が A 加群の同型を与えないことを意味します．非余可換なホップ代数に対して，(1.1) の σ の代わりに何か非自明な準同型写像[3] $\check{R}_{12}: M_1\otimes M_2 \to M_2\otimes M_1$ が存在し，しかもそれが**ヤン-バクスター**（Yang-Baxter）**方程式**

$$(\check{R}_{23}\otimes 1)(1\otimes\check{R}_{13})(\check{R}_{12}\otimes 1) = (1\otimes\check{R}_{12})(\check{R}_{13}\otimes 1)(1\otimes\check{R}_{23}) \tag{1.2}$$

をみたすとき，$\check{R}_{ij}$ を **R 行列**とよびます．ヤン-バクスター方程式は図1のよ

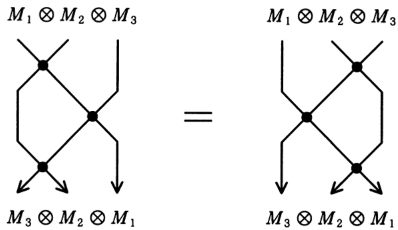


図1　ヤン-バクスター方程式の図形表示．黒丸が R 行列を表し，そこで M_i たちのテンソル積の順序が入れ替わる．ヤン-バクスター方程式は両辺の作用が同じ結果を与えることを要請している．

うに図形表示することができます．ここで $\check{R}_{12}$ が準同型写像であるとは，$\check{R}_{12}$ が A の作用と可換ということ，すなわち $M_1 \otimes M_2$ から $M_2 \otimes M_1$ への写像の間の関係式

$$[\check{R}_{12}, \Delta(a)] = 0, \qquad a \in A \tag{1.3}$$

をみたすことを意味します．ただし，$[x, y] := xy - yx$ とおきました．

さて，リー代数 $\mathfrak{g}$ に対してその普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ を考えると，これはホップ代数になります．実際，任意の二つの $U(\mathfrak{g})$ 加群のテンソル積 $M_1 \otimes M_2$ 上において $U(\mathfrak{g})$ の中の $\mathfrak{g}$ の元 x の作用を $x \otimes 1 + 1 \otimes x$（いわゆる対角的作用）と定めると，これは $U(\mathfrak{g})$ 全体の作用に整合的に拡張することができます（3節を参照）．この作用は「左右対称」ですから $U(\mathfrak{g})$ は「余可換な」ホップ代数ですが，$U(\mathfrak{g})$ をうまく拡大して量子群を構成することができないでしょうか？　$\mathfrak{g}$ が $\boldsymbol{C}$ 上の有限次元単純リー代数であるとき答えは「yes」で，そ

---

1)　ただし，ここでいう量子群に対応したある種のもっと群に近い対象を考えてそれを量子群とよぶ「群派」の立場もあります．これについては本書のシリーズ［10］に上野，野海，中神各氏の解説があります．ここでは「代数派」の立場で考えます．

2)　これまで知られているものはすべて擬三角（quasi-triangular）擬ホップ代数というものになっています．

3)　ここが「同型」とは限らないところがミソで，実際はほとんどの M_1, M_2 に対しては $\check{R}_{12}$ は同型になるのですが，同型とならない場合が量子群の表現論においても場の理論への応用においても重要なのです（11節を参照）．

の量子群がヤンギアン $Y(\mathfrak{g})$ なのです．すなわち，

ヤンギアン $Y(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ を部分ホップ代数にもつ最小の量子群である.

ですから，ヤンギアンというのはリー代数から得られる最も簡単で系統的な量子群ということができます．$Y(\mathfrak{g})$ は，また，もっとよく知られた量子群であるアフィン量子群 $U_q(\hat{g})$ の極限としても得ることができます．

それではなぜ量子群が可積分場の理論に必要なのでしょうか？　ヤンギアンの具体的な定義を述べる前に，その理由を考えておきましょう．

2°　Coleman-Mandula の定理

場の理論の対称性と可積分性の関係について考えましょう．ある場の理論の散乱確率がヒルベルト空間 H とその上に作用する散乱行列 S で記述されるとします．S と可換な H 上のユニタリ作用素全体 G は積に関して群をなすので，これを散乱行列 S の対称群とよびます．相対論的不変性の仮定より，G はポアンカレ群 P（＝並進群とローレンツ群の半直積）を部分群として含んでいます．対称群 G の部分群 B が P と可換であるとき B を**内部的** (internal) であるといいます． 各粒子は内部対称群 B のある表現をにない，その表現空間のベクトルを粒子の「内部状態」とみなすことができます．

ところで，粒子の質量は理論の最も基本的な量のひとつです．模型を構築する立場からすると，このような基本的な量が「任意のパラメーター」であることはむしろ不自然で，理論の整合性から質量のとる値（質量スペクトル）が決定されるものが魅力的に思えます．たとえばもう少し問題を限定して，粒子の内部対称群の表現からその質量が一意的に決まるということがどのような状況で起こるかを考えます．

質量はポアンカレ群の表現により定まります．もし対称群 G が内部対称群 B とポアンカレ群の「直積」であるならば，「内部対称性の表現」と「質量」

は互いに独立のものになってしまいます．言い換えると，内部スペクトルと質量スペクトルの間になんらかの関係を得るためには，G がポアンカレ群 P の（P と B の直積でないという意味で）「非自明な」拡張となっていることが必要となります．ところが残念なことに，次の定理から無質量（massles）の粒子をもたない，すなわち有質量（massive）の理論ではこのような可能性がないことがわかります．

定理（Coleman - Mandula の「nogo」定理 [3]）

有質量理論の散乱行列 S が非自明であるならば，対称群 G は内部的な部分群 B とポアンカレ群 P の直積 $B \times P$ と局所同型[4] となる．

ですから，対称群から質量スペクトルを決定しようという試みははじめから「立入禁止（nogo）」の試みだというわけです．

ところが，この定理には「ぬけ道」があるのです．

3° 無限小生成子の余可換性と局所性

Coleman - Mandula の定理の証明では，二体の散乱行列と対称群 G の可換性が繰り返し用いられます．その際，二粒子状態への G の元 X の作用が対角的

$$X \otimes X \tag{3.1}$$

であることを前提としています．これは群が表現のテンソル積へ作用する標準的な方法ですから問題はないはずですが，(3.1) の意味をホップ代数の観点から見直してみましょう．

G の単位元における接ベクトル（無限小生成子ともよばれます）全体 $\mathfrak{g}$ はリー代数になります．(3.1) をリー代数の元 x の作用に翻訳すると

4) それぞれに対応するリー代数が同型となるとき，二つのリー群は局所同型であるといいます．

$$x \otimes 1 + 1 \otimes x \tag{3.2}$$

となります．実際，

$$\begin{aligned}
&(x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y) - (y \otimes 1 + 1 \otimes y)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\
&\quad = (xy \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes xy) \\
&\qquad - (yx \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes yx) \\
&\quad = [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes [x, y]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

という計算により[5)]，作用（3.2）はたしかにリー代数の作用になっていることがわかります．上の計算でたすきがけの項 $x \otimes y$, $y \otimes x$ がそれぞれキャンセルしたことがポイントです．ここで天下りですが，（3.2）を表現によらないリー代数の準同型写像

$$\begin{aligned}
\varDelta : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \\
x &\longmapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x
\end{aligned} \tag{3.4}$$

と考え直し，これを $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の間の代数の準同型写像

$$\varDelta : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \tag{3.5}$$

に拡張できるかどうか考えます．$\mathfrak{g}$ は $U(\mathfrak{g})$ を生成しますから（できるとしたら）拡張の仕方は一意的ですが，$x, y \in \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$ に対して $U(\mathfrak{g})$ の関係式 $xy - yx = [x, y]_{\mathfrak{g}}$ との整合条件

$$\varDelta(x)\varDelta(y) - \varDelta(y)\varDelta(x) = \varDelta([x, y]_{\mathfrak{g}}) \tag{3.6}$$

がみたされなければなりません．ただし，$[x, y]_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ におけるリー積を意味します．ところが，（3.6）は形式的には（3.3）と同じ関係式を表しています．したがって，（3.4）は準同型写像（3.5）へと拡張できることが保証されました．この準同型写像 $\varDelta$ を $U(\mathfrak{g})$ の**余積**とよびます．これは1節で述べた $U(\mathfrak{g})$ がホップ代数であることをだいたい示したことになっています[6)]．

また逆に，A を既約余可換なホップ代数，$\mathfrak{g}$ を $\varDelta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ なる A の元 x の全体とすると，$\mathfrak{g}$ は交換子についてリー代数であり，しかも $A \simeq U(\mathfrak{g})$ となる，という定理が知られています．結局，対称性をリー代数や

余可換なホップ代数で考えている限りは Coleman-Mandula の定理の束縛から逃れることができません．そこで，Coleman-Mandula の定理のぬけ道として

散乱行列 S の対称代数を非余可換ホップ代数に拡張する

ことを考えます．さらに，散乱行列が有限次元リー代数 $\mathfrak{g}$ の対称性も合わせもつことを仮定すると，これら二つの要求をみたす最小の代数としてヤンギアン $Y(\mathfrak{g})$ が可積分場の理論の舞台に自然に登場してきます．もちろんこのようにしたからといって，ここまでの議論では理論が可積分となる保証はありません．

ゲージ対称性をもつ場の理論では，対称群の無限小変換を局所的な保存カレントの空間積分として表すことができます．これらは**局所電荷**（local charge）とよばれます．このとき，局所的な電荷の二粒子状態への作用は（3.2）のように対角的になります．したがって，非余可換な対称代数を考えるということは，非局所的な対称性を考えることにもなります．

4° 非余可換ホップ代数としての超対称代数

実は場の理論に非余可換ホップ代数が出てくるのは初めてのことではありません．超対称性（supersymmetry）を記述する**超対称代数**（supersymmetric algebra）は非余可換ホップ代数の例になっています．これは寄り道ですが，よい機会ですのでそのことを見ておきましょう．

超対称代数には bosonic と fermionic の二種類の生成元があります．

5） ここでリー代数の元の「積」xy 等は，表現空間上への作用の合成の意味で用いています．

6） ホップ代数であるためにはこの他に余単位射（counit）と対合射（antipode）が必要ですが，$U(\mathfrak{g})$ の場合これらの存在はほとんど自明となります．

bosonic な生成元は二粒子状態に（3.2）によって対角的に作用しますが，fermionic な生成元 a は二粒子状態に対し

$$a\otimes 1+(-1)^F\otimes a \tag{4.1}$$

と作用します．（したがって左右非対称です．）F は fermion 数を数える作用素であり，fermionic な元 a と F は

$$(-1)^F a = -a(-1)^F \tag{4.2}$$

と反交換します．（4.1）において $(-1)^F$ の因子が必要とされるのは，場の理論の記法によりテンソル積の第2項に演算子が作用するとき第1項の演算子を飛びこさなければならないからです．このように，（4.1）は，たとえホップ代数の概念を知らなくても，場の理論の記法の整合性から自然に導入されます．ところで，（4.1）により Coleman-Mandula の定理から逃れることは，そもそも超代数の導入の動機のひとつでありました．しかし，それが非余可換ホップ代数であるという認識は著者の知る限り量子群の導入の後のようです．

さて，（4.1）をホップ代数の立場から見てみましょう．a, b をともに超対称代数 A の fermionic な元とすると，a, b の反交換子はある bosonic な元 c となります．すなわち

$$\{a, b\} := ab + ba = c. \tag{4.3}$$

3節と同様の議論によって，（4.1）が対称代数 A 上の余積 $\varDelta$ に拡張されるための整合条件として，上の a, b, c は

$$\varDelta(a)\varDelta(b)+\varDelta(b)\varDelta(a) = \varDelta(c) \tag{4.4}$$

をみたさなければなりません（（3.6）を参照）．これは，（3.3）と同様の計算により次のように示されます．

$$\begin{aligned}\varDelta(a)\varDelta(b)+\varDelta(b)\varDelta(a) &= ab\otimes 1+a(-1)^F\otimes b+(-1)^F b\otimes a+1\otimes ab\\ &\quad + ba\otimes 1+b(-1)^F\otimes a+(-1)^F a\otimes b+1\otimes ba\\ &= c\otimes 1+1\otimes c = \varDelta(c)\end{aligned} \tag{4.5}$$

途中でたすきがけの項をキャンセルする際に，関係式（4.2）を用いたことに

注意します.

超対称代数は一般の非余可換ホップ代数と比べ，次の二つの特殊な性質をもっています．第一に，超対称代数は超リー代数の構造をもっていて，対応する群（超リー群）を考えることができます．一般の非余可換ホップ代数の場合にはこれはできません．第二に，fermionic 生成子とその作用（4.1）は fermionic 場の局所電荷により与えることができます.

最後に，超対称性理論の可積分性について述べましょう．超対称代数はポアンカレ代数の非自明な拡張を与え，その表現の構造は質量スペクトルに非自明な関係を与えます．しかし，それは理論の質量スペクトルを完全に決定するほどの拘束性を一般にはもちません．ところが，2次元の場合には（一口に2次元超対称代数といってもいろいろなものがあるのですが）多くの可積分模型の例が存在し，なかには R 行列が構成されているものもあります．2次元超対称代数にはここで述べる量子群の方法論とは大きく異なる独自の方法論が存在しますが，このように一部の2次元超対称代数が量子群として捉えられるという事実は，2次元の場の理論の可積分性と量子群の普遍的な関係を示唆していると考えることもできます.

5° ヤンギアンとその余積の定義

さて，お待たせしました．いよいよヤンギアンを定義しましょう．$\mathfrak{g}$ を $\boldsymbol{C}$ 上の単純リー代数，$(\, , \,)$ を $\mathfrak{g}$ の不変双一次形式，$\{I_p\}$ を $(\, , \,)$ に関する $\mathfrak{g}$ の一つの正規直交基底とします.

定義　$x, J(x)$（$x \in \mathfrak{g}$）を生成元とし，次の関係式により定まる $\boldsymbol{C}$ 上の代数 $Y(\mathfrak{g})$ をヤンギアンとよぶ.

$$J(ax+by) = aJ(x) + bJ(y), \qquad a, b \in \boldsymbol{C} \tag{5.1}$$

$$[x, J(y)] = J([x, y]) \tag{5.2}$$

$$[J(x), J([y,z])] + [J(y), J([z,x])] + [J(z), J([x,y])] = \sum_{p,q,r} ([x, I_p], [[y, I_q], [z, I_r]]) \{I_p, I_q, I_r\} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}&[[J(x), J(y)], [z, J(w)]] + [[J(z), J(w)], [x, J(y)]] \\ &= \sum_{p,q,r}\Big(([x, I_p], [[y, I_q], [[z,w], I_r]]) \\ &\quad + ([z, I_p], [[w, I_q], [[x,y], I_r]])\Big)\{I_p, I_q, J(I_r)\}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

ここで $\{x_1, x_2, x_3\} = \frac{1}{24}\sum_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}$ と略記した（$\sum_\sigma$ は $\{1, 2, 3\}$ のすべての置換についての和）.

$Y(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ を部分代数として含んでいることに注意しましょう．さて，(5.1)，(5.2) は $J(x)$ が $\mathfrak{g}$ の adjoint 表現だという意味ですが，(5.3)，(5.4) の意味は式を何度見てもこのままでは全くわかりません[7]. これらは $Y(\mathfrak{g})$ の余積を考えて初めて意味が見えてきます．そのために $Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g})$ の元 Ω を

$$\Omega = \sum_p I_p \otimes I_p$$

としましょう．関係式 (5.1) ～ (5.4) の最も本質的な点は，それらが $Y(\mathfrak{g})$ の生成元 $x, J(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ に対して

$$\begin{aligned} x &\longmapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x \\ J(x) &\longmapsto J(x) \otimes 1 + 1 \otimes J(x) + \frac{1}{2}[x \otimes 1, \Omega] \end{aligned} \tag{5.5}$$

を対応させる写像と整合的であること，すなわち，対応 (5.5) を代数の準同型写像

$$\Delta : Y(\mathfrak{g}) \longrightarrow Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g}) \tag{5.6}$$

に拡張できる，という点にあります．この Δ がホップ代数としての $Y(\mathfrak{g})$ の余積を与えます．$\Delta(J(x))$ が左右非対称ですから，$Y(\mathfrak{g})$ は非余可換ホップ代

数となります.

少し感じをつかむため，(5.2) と (5.5) が整合的であることを見てみましょう.

$$\begin{aligned}\Delta([x,J(y)]) &= [\Delta(x),\Delta(J(y))]\\ &= [x,J(y)]\otimes 1+1\otimes[x,J(y)]+\frac{1}{2}[\Delta(x),[y\otimes 1,\Omega]].\end{aligned} \tag{5.7}$$

ここで $[\Delta(x),\Omega]=0$ に注意すると，ヤコビ恒等式より

$$[\Delta(x),[y\otimes 1,\Omega]] = -[\Omega,[\Delta(x),y\otimes 1]] = [[x,y]\otimes 1,\Omega] \tag{5.8}$$

となります. これを (5.7) に代入して

$$\begin{aligned}\Delta([x,J(y)]) &= J([x,y])\otimes 1+1\otimes J([x,y])+\frac{1}{2}[[x,y]\otimes 1,\Omega]\\ &= \Delta(J([x,y]))\end{aligned} \tag{5.9}$$

となります. これは関係式 (5.2) が余積 Δ により「保たれる」，すなわち互いに整合的であることを意味しています. 同様にして（といってもなかなか大変ですが）(5.3), (5.4) も (5.5) と整合的であることを示すことができます.（実際には，脚注7) より sl_2 以外の場合は (5.3) のみを調べれば十分.）

Drinfel'd は，Faddeev 率いるレニングラード・スクールによる可積分模型の仕事のなかで，(5.5) のような非対角作用が本質的な役割を果たしていることを見抜いて，非可換ホップ代数として量子群を定式化しました. おそらく Drinfel'd は，複雑な関係式 (5.3), (5.4) をいきなりどこからかひねり出してきたのでなく，はじめにまず余積 (5.5) を考え，それによって保たれる関係式として逆に (5.3), (5.4) を導いたのであろうと筆者は想像します. いずれにしても，これは彼のその後の量子群の理論における超絶技巧ぶりの第一歩にすぎないのでした….

(5.5) に戻りましょう. $J(x)$ の作用は非対角的ですから，すでに述べたよ

7) $\mathfrak{g}=sl_2$ のとき (5.3) の両辺は恒等的に0となります. また，$\mathfrak{g}\neq sl_2$ のときは (5.4) は (5.3) から得られます.

うに，場の理論において $J(x)$ を局所電荷として表すことはできません．Bernard [1] は $J(x)$ を非局所的な保存カレントの積分，すなわち，非局所電荷として表すことができることを示しています．すなわち，

ヤンギアン対称性は局所および非局所カレントによって生成される対称性である．

6° ヤンギアンの1変数自己同型群

余積以外に重要なヤンギアンの性質として，次のような1変数自己同型群の存在があります．

定理　任意の複素数 u に対して，変換

$$\tau_u : \begin{cases} x \longmapsto x \\ J(x) \longmapsto J(x) + ux \end{cases} \qquad (x \in \mathfrak{g}) \tag{6.1}$$

は $Y(\mathfrak{g})$ の自己同型を引き起こす．

次節で見るように，この自己同型は可積分模型への応用において重要な役割を果たします．

7° ヤンギアンとポアンカレ代数の結合

定義　生成元 P_0, P_1, L と関係式

$$[L, P_0] = P_1, \qquad [L, P_1] = P_0, \qquad [P_0, P_1] = 0 \tag{7.1}$$

により定まる $\boldsymbol{C}$ 上の代数 $\mathcal{P}$ を2次元の**ポアンカレ代数**とよぶ．

L, P_0, P_1 はそれぞれローレンツ・ブースト，エネルギー，運動量作用素を表します．(7.1) はリー代数の関係式ですから，$\mathcal{P}$ は余可換ホップ代数です．

u を不定元, m を正の実数として, 環 $\boldsymbol{C}[e^u, e^{-u}]$ 上への $\mathcal{P}$ の生成元の作用を

$$P_0 = m\cosh u, \qquad P_1 = m\sinh u, \qquad L = \frac{d}{du} \tag{7.2}$$

と定めると, これは $\mathcal{P}$ の表現になります. これを質量 m の一粒子表現とよびます. また, 変数 u を**ラピディティー**とよびます.

われわれの目的のためにはヤンギアン $Y(\mathfrak{g})$ とポアンカレ代数 $\mathcal{P}$ をともに含むホップ代数が必要なので, この二つを非自明に結合させて新しい代数を作ることにします. そこで, $Y(\mathfrak{g}), \mathcal{P}$ により生成され, 関係式

$$[L, J(x)] = \gamma^{-1}x, \qquad x \in \mathfrak{g} \tag{7.3}$$

をもつ代数 $\mathcal{P}Y(\mathfrak{g})$ を考えます. ただし, これ以外の $Y(\mathfrak{g})$ と $\mathcal{P}$ の生成元はすべて交換し, また結合定数 γ はゼロでない複素数とします. わざわざ γ^{-1} としたのは, 後の便利のためです. $\mathcal{P}Y(\mathfrak{g})$ の中で $\mathcal{P}$ と $Y(\mathfrak{g})$ はそれぞれすでに関係式をもっていますから, 関係式 (7.3) はそれらと整合的でなければなりませんが, それを確かめるのは難しくありません.

ところでよく見ると, (7.3) は前節で述べた $Y(\mathfrak{g})$ の自己同型 (6.1) の微分を用いて

$$[L, a] = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{du}\tau_u(a), \qquad a \in Y(\mathfrak{g}) \tag{7.4}$$

と表すことができます. したがって, (7.3) と $Y(\mathfrak{g})$ の整合性は $\tau_u(a)$ が $Y(\mathfrak{g})$ の自己同型であるという事実からも保証されます.

さて, (7.4) はもっと大事な意味をもっています. L はローレンツ変換の無限小生成子ですから,

$Y(\mathfrak{g})$ の自己同型 (6.1) はローレンツ変換と同一視できる

と言うことができます. これは, どういうわけかヤンギアンにははじめから2次元の相対論的場の理論の対称代数に必要な性質が「組み込まれている(built-in)」ことを示すひとつの例です.

8° ヤンギアンの有限次元既約表現

Drinfel'd によって，$Y(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現の分類は，$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の分類の大変美しい拡張になっていることが明らかにされました．

はじめに，単純リー代数の有限次元既約表現の分類について思い出しておきましょう．$\mathfrak{g}$ のランク（カルタン部分代数の次元）を r とします．このとき，$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現と r 個の非負整数の組 (d_i) が1対1に対応します．(d_i) を対応する表現の**最高ウエイト**とよび，また，最高ウエイトが $(0, \cdots, \overset{a}{1}, \cdots, 0)$ である既約表現を（a 番目の）**基本表現**とよびます．

$Y(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現の分類は，「最高ウエイト」を「r 個の1変数モニック多項式の組」[8] で置き換えることにより，$\mathfrak{g}$ の場合と全くパラレルになります．すなわち，

> $Y(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現と r 個の1変数モニック多項式の組 (P_i) とは1対1に対応する．

多項式 $P_1, \cdots, P_r$ のことを，対応する有限次元表現の **Drinfel'd 多項式**とよびます．さらに $\mathfrak{g}$ の場合にならって，Drinfel'd 多項式が $P_i(t) = 1$ $(i \neq a)$，$P_a(t) = t - a$ となる既約表現を基本表現とよび，$W_a(b)$ と書くことにします．このとき，次の事実が成り立ちます（ヤンギアンの表現論については [5] を参照）．

> 自己同型 τ_u (6.1) により $W_a(b)$ は $W_a(b+u)$ に引き戻される．　(8.1)

すなわち，τ_u（これはローレンツ変換でもあったのでした）は，Drinfel'd 多項式の零点を u だけ平行移動するという作用をもちます．

ヤンギアンとポアンカレ代数が関係式 (7.3) を通して絡まっている様子がだんだん見えてきました．

9° ヤンギアンの基本表現と一粒子状態

ヤンギアンとポアンカレ代数を合体できたので，それぞれの基本表現と一粒子表現も合体させましょう．ポイントは7節で述べた $Y(\mathfrak{g})$ の自己同型とローレンツ変換の同一視です．

$Y(\mathfrak{g})$ の基本表現 $W_a(0)$ 上への $x, J(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ の作用を $x_0, J_0(x)$ と書くことにします．b を変数として $\mathscr{W}_a = \boldsymbol{C}[b, e^{\gamma b}, e^{-\gamma b}] \otimes W_a(0)$ と定め，$\mathscr{W}_a$ 上への $\mathcal{P}Y(\mathfrak{g})$ の生成元の作用を

$$
\begin{aligned}
&P_0 = m_a \cosh \gamma b \otimes 1, \quad P_1 = m_a \sinh \gamma b \otimes 1, \quad L = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{db} \otimes 1 \\
&x = 1 \otimes x_0, \quad J(x) = 1 \otimes J_0(x) + b \otimes x_0
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

と定めます．ただし，γ は (7.3) における結合定数です．(9.1) は P の一粒子表現となっています．また，(6.1) と (8.1) より，$Y(\mathfrak{g})$ の表現になっていることもわかります．さらに，(7.3) もみたしています．つまり，(9.1) により $\mathcal{P}Y(\mathfrak{g})$ の表現が定まります．これを $\mathcal{P}Y(\mathfrak{g})$ の（a 番目の）基本表現とよびます．

b をある値に特殊化して (9.1) の中の $Y(\mathfrak{g})$ の作用を考えると，(8.1) からわかるようにそれは $W_a(b)$ と同型になります．つまり，

> $\mathcal{P}Y(\mathfrak{g})$ の基本表現 $\mathscr{W}_a$ に従う一粒子状態のラピディティー γb における「内部状態」は，$Y(\mathfrak{g})$ の基本表現 $W_a(b)$ に従う．

粒子の速度と「内部状態」が連動していることが大事な点で，これが $Y(\mathfrak{g})$ がポアンカレ代数と非自明に結合していることの重要な帰結です．

これで，$Y(\mathfrak{g})$ の基本表現 $W_a(b)$ が静的な表現論の世界を飛び立ち，ラピディティー γb で2次元時空の世界を「飛び交う」様子がはっきりと目に浮かんできました．しかし，この世界は本当に矛盾のない物理法則をもつ世界な

8) 「モニック (monic) 多項式」とは，最高次の係数が1となる多項式のことです．

のでしょうか？ 途中で粒子たちが「墜落」してしまうことはないのでしょうか？ 実は，それらの心配がないこともすべてヤンギアンにははじめから組み込まれているようなのです．

10° S 行列と R 行列

2次元時空を飛ぶ $\mathcal{P}Y(\mathfrak{g})$ の基本表現たちが「すれ違う」ときに相互作用 (interact) する世界（模型）を考えましょう．さらに，すれ違うときに各粒子のラピディティーは保たれることを仮定します．各粒子の「内部状態」は $Y(\mathfrak{g})$ の基本表現（これは有限次元ベクトル空間であった）の中の一つの「ベクトル」とみなします．すれ違うときにラピディティーは変化しませんが，「内部状態」は変化するというわけです[9]．簡単のため，二つの粒子が「すれ違う」場合を考えます (図2)．すれ違うためには二つの粒子のラピディティーの間に不等式 $\gamma b_1 > \gamma b_2$ が成り立つことが必要です．

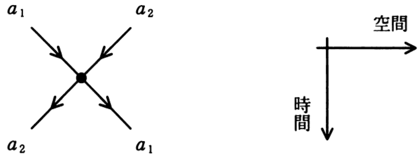


図2　二体散乱

図2において，ある二体状態が，すれ違った後でどのような二体状態になるのかはある一定の確率法則で定まるものとして，これを記述する行列（線形写像）を **S 行列** (scattering matrix) とよび，$S_{a_1 a_2}(b_1 - b_2)$ と書くことにします．ポアンカレ普遍性により，S はラピディティーの差にしか依存しません．さて，ここがいちばん肝心な点ですが，S 行列に $Y(\mathfrak{g})$ 対称性

$$[S_{a_1 a_2}(b_1 - b_2), x] = 0 \qquad x \in Y(\mathfrak{g}) \tag{10.1}$$

を要請します．ところで，(10.1) が意味をもつためには，図2の二体状態へ

の $Y(\mathfrak{g})$ の作用を定めておくことが必要です．そこで，ある意味では自然でまたある意味では強引ですが，図 2 のすれ違う前と後の状態を，それぞれ $Y(\mathfrak{g})$ の表現のテンソル積 $W_{a_1}(b_1)\otimes W_{a_2}(b_2)$，$W_{a_2}(b_2)\otimes W_{a_1}(b_1)$ とみなすことにします．すると，余積（5.5）によってこれらへの $Y(\mathfrak{g})$ の作用が決まります．ところで（10.1）は，はじめにお話しした R 行列の準同型性の条件（1.3）に他なりません！ さらに「条件（10.1）をみたす線形写像はスカラー関数倍を除いて一意的である」ことが知られています．以上により，次のことがわかりました．

> S 行列 $S_{a_1a_2}(b_1-b_2)$ は R 行列 $\check{R}_{a_1a_2}(b_1-b_2)$ のスカラー関数倍になる．

$Y(\mathfrak{g})$ は非余可換ホップ代数ですので，R 行列は非自明となり，よって S 行列も非自明となります．

11° 商表現と束縛状態

（1.1）の直後の脚注 3）に述べたように，R 行列 $\check{R}_{a_1a_2}(b_1-b_2)$ はほとんどの b_1-b_2 の値に対して同型写像ですが，いくつかの特別な値に対しては同型写像になりません．例として，$\mathfrak{g}=A_{n-1}$，$a_1=a_2=1$ の場合を考えると，$b_1-b_2=\pm 1$ のときに限り $\check{R}_{11}(b_1-b_2)$ が同型とならないことが知られています．また，これと関連していることですが，$b_1-b_2=-1$ のときに限り対応するテンソル積 $W_1\left(b-\frac{1}{2}\right)\otimes W_1\left(b+\frac{1}{2}\right)$ から $W_2(b)$ への全射準同型をもちます[10]．このことを，$W_1\left(b-\frac{1}{2}\right)$ と $W_1\left(b+\frac{1}{2}\right)$ の散乱過程の「中間状態」

9）二人の人がすれ違うときに静電気が起きて電荷を交換する，というイメージがわかりやすいでしょう．

10）言い換えると，$W_1\left(b-\frac{1}{2}\right)\otimes W_1\left(b+\frac{1}{2}\right)$ が $W_2(b)$ を商表現にもつということです．逆に，$b_1-b_2=1$ のとき，対応するテンソル積 $W_1\left(b+\frac{1}{2}\right)\otimes W_1\left(b-\frac{1}{2}\right)$ は $W_2(b)$ を商表現ではなく部分表現にもちます．

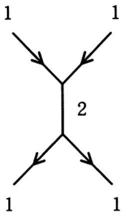


図3　束縛状態

として表現 $W_2(b)$ の粒子が現れる，と解釈できます（図3）.

このとき二つの粒子のラピディティーの差は $\gamma(b_1-b_2)$ ですが，実は次節でわかるように γ は純虚数の値（12.1）をとります．したがって，$b_1-b_2=-1$ とすると，$\gamma(b_1-b_2)$ は純虚数となり，特に，それぞれの粒子のラピディティー $\gamma b_1, \gamma b_2$ は同時に実数にはなりません．ところで，自由運動（等速直線運動）する粒子のラピディティーは実数です．もともと S 行列は十分遠方で自由運動する粒子の散乱を記述していたので，いま実数でないラピディティーが出てくるのは少し変なのですが，波動関数の描像ではこのように複素数のラピディティーをもつ状態は時空のある領域に「束縛されている」状態を表すと考えられるので，図3のような中間状態を**束縛状態**（bound state）とよびます．S 行列を複素関数として考えることは意味があり，束縛状態は複素関数としての S 行列の極に対応することが知られています [8, 9]．以上の議論をまとめると，

$$\text{束縛状態} \longleftrightarrow \text{商表現}$$
$$S\text{行列の極} \longleftrightarrow R\text{行列の非正則性}$$

という対応になります．これもまた S 行列理論とヤンギアンの表現論の不思議な調和のひとつの例です．

12° 保存量の禁止則と質量公式

$Y(\mathfrak{g})$ 対称性をもつ S 行列を最初に考えたのは Ogievetsky-Reshetikhin-Wiegmann [7] です．しかしまだその時点では Drinfel'd による $Y(\mathfrak{g})$ の有限次元表現の定式化が広く知られておらず，質量スペクトルの導出も S 行列の整合性の議論によるものでした．[6] では $Y(\mathfrak{g})$ の表現のデータにより質量スペクトルが統一的な式で表されることを示しました．

以下で述べる諸結果の導出においては，いずれも束縛状態に対応するヤンギアンのテンソル表現の部分表現の解析が技術的核心となります．そこでは量子群の定式化が大いに役立ちます．ここではその詳細に立ち入ることは残念ながらできませんが，興味をもたれた方は [6] をご参照ください．

12.1 結合定数 γ の一意性

ヤンギアンとポアンカレ代数の結合定数 γ (7.3) は，(9.1) からわかるように，ヤンギアンの作用する内部空間と時空のスケールの比を与えます．この比は散乱理論の整合性より，次のように符号を除いて一意的に定まってしまいます．(5.3), (5.4) において，$\mathfrak{g}$ の不変双一次形式 (,) を最長ルートの長さの二乗が 2 となるように正規化するとき，

$$\boxed{\gamma = \pm\frac{2\pi i}{g^{\vee}}.} \tag{12.1}$$

ここで，$g^{\vee}$ は $\mathfrak{g}$ の双対コクセター数です (次ページの表 1)．以下では，γ は (12.1) の値をとるものとします．

表1　$\mathfrak{g}$ の双対コクセター数，コクセター数，指数

$\mathfrak{g}$	双対コクセター数	コクセター数	指　　数
A_r	$r+1$	$r+1$	$1, 2, \cdots, r$
B_r	$2r-1$	$2r$	$1, 3, 5, \cdots, 2r-1$
C_r	$r+1$	$2r$	$1, 3, 5, \cdots, 2r-1$
D_r	$2r-2$	$2r-2$	$1, 3, 5, \cdots, 2r-3, r-1$
E_6	12	12	1, 4, 5, 7, 8, 11
E_7	18	18	1, 5, 7, 9, 11, 13, 17
E_8	30	30	1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
F_4	9	12	1, 5, 7, 11
G_2	4	6	1, 5

12.2　保存量の禁止則

可積分模型ではいままで述べてきたヤンギアン対称性とはまた別に，古典可積分系のアナロジーにより，無限個の互いに可換な局所的な保存量が存在することが期待されます．これらが $Y(\mathfrak{g})$ とは可換な可換代数 $\mathcal{T}$ をなすとします[11]．$\mathcal{T}$ の元 I がローレンツ・ブースト L と交換関係

$$[L, I] = sI \tag{12.2}$$

をみたすとき，I のスピンは s であるといいます．S 行列のヤンギアン対称性は保存量のスピンに対して次の禁止則を与えます．

保存量のスピンは $\mathfrak{g}$ のコクセター数を法として $\mathfrak{g}$ の指数となる．

ここで，$\mathfrak{g}$ のコクセター数と指数（exponent）は表1に与えられています．

12.3　保存量の電荷と質量公式

以下では，簡単のために $\mathfrak{g} \neq D_r, E_6$ とします[12]．

われわれの模型では粒子と $Y(\mathfrak{g})$ の基本表現とが1対1に対応していました．基本表現 $W_a(b)$ に対応する粒子を M_a と書きます．基本表現 $W_a(b)$ の

インデックス a はまた $\mathfrak{g}$ のディンキン図の頂点と対応しています．そこで，図4のようにディンキン図の頂点に番号をつけて，この番号を用いて粒子 M_a を区別することにします．さらに，各 $\mathfrak{g}$ に対して，図4の黒色の頂点に対応する番号を min とします．（たとえば，$\mathfrak{g}=A_r$ ならば $\min=1$.）$W_{\min}(b)$ を $Y(\mathfrak{g})$ の最小表現とよびます．

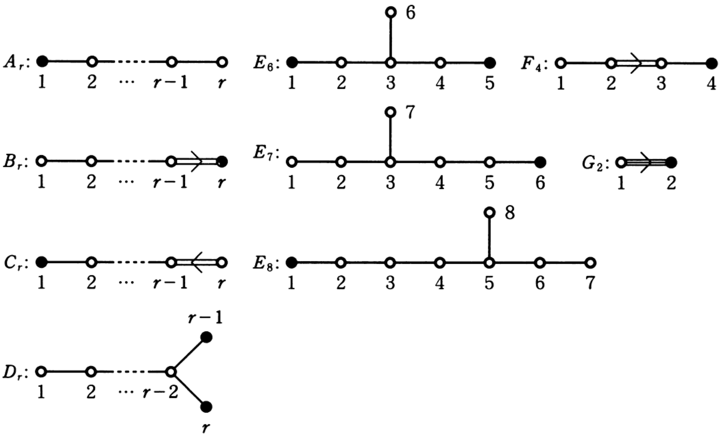


図4　ディンキン図．黒色の頂点が最小表現に対応している．

いま，s をコクセター数を法として $\mathfrak{g}$ の指数の一つに一致するとします．スピン s の保存量 I の一粒子状態 M_a への作用は，(9.1) と (12.2) より

$$I=\omega_a \exp(s\gamma b)$$

11) $Y(\mathfrak{g})$ と $\mathcal{T}$ はそれぞれ「可積分性」の根拠であるが，それらは互いに「独立ではない」であろうと推測されます．つまり，背後により大きな代数があり，その中で $Y(\mathfrak{g})$ と $\mathcal{T}$ がヒルベルト空間上で互いに可換子代数（commutant）になっている状況を期待しています．実際，無質量模型である CFT の場合には，縮退アフィン・ヘッケ代数を用いて具体的にそのような状況を実現できることが知られています [2].

12) $\mathfrak{g}=D_r, E_6$ の場合は最小表現が二つあり，以下の結果の表示が少し面倒になります．

となることがわかります．スカラー数 ω_a を保存量 I に関する粒子 M_a の電荷とよびます．このとき，ω_a の $\omega_{\min}$ との比は次の公式で与えられます：

$$\frac{\omega_a}{\omega_{\min}} = \sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{2sb_j\pi i}{g^\vee}\right). \tag{12.3}$$

ここで，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ は各表現 $W_a(b)$ についてそれぞれ定まる，融合成分 (fusion content) とよばれる有理数です (表2)．$W_a(b)$ は最小表現のテンソル積 $W_{\min}(b-b_1)\otimes\cdots\otimes W_{\min}(b-b_n)$ の商表現となります．

表2　$Y(\mathfrak{g})$ の基本表現の融合成分．$a:[b_1, \cdots, b_n]$ は $W_a(b)$ の融合成分が $[b_1, \cdots, b_n]$ であることを表す．

$\mathfrak{g}$	融合成分
A_r	$a:\left[\frac{a-1}{2}, \frac{a-3}{2}, \cdots, -\frac{a-1}{2}\right]$ $(1\le a\le r)$
B_r	$a:\left[\frac{2r-2a-1}{4}, -\frac{2r-2a-1}{4}\right]$ $(1\le a\le r-1)$, $r:[0]$
C_r	$a:\left[\frac{a-1}{4}, \frac{a-3}{4}, \cdots, -\frac{a-1}{4}\right]$ $(1\le a\le r)$
E_7	$1:\left[\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right]$, $2:[3, 2, -2, -3]$, $3:\left[\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right]$ $4:[1, 0, -1]$, $5:\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $6:[0]$, $7:[4, -1, -2]$, $[2, 1, -4]$
E_8	$1:[0]$, $[5, -5]$, $2:\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $3:[1, 0, -1]$, $4:\left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right]$ $5:[2, 1, 0, -1, -2]$, $[4, 3, 2, -2, -3, -4]$, $6:\left[\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right]$, $7:[3, -3]$, $8:\left[\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right]$, $\left[\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right]$
F_4	$1:[1, -1]$, $2:\left[\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right]$, $3:\left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right]$, $4:[0]$, $\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right]$
G_2	$1:\left[\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right]$, $2:[0]$, $\left[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$

最後に，いよいよ目標の粒子 M_a の質量 m_a の公式を与えましょう．(7.1) より

$$[L, P_0+P_1] = P_0 + P_1$$

ですから，P_0+P_1 はスピン 1 の保存量です．一方，(9.1) より

$$P_0 + P_1 = m_a \exp(\gamma b)$$

ですから，質量 m_a は P_0+P_1 の電荷に他なりません．したがって，公式 (12.3) で $s=1$ とおいて，

$$\text{質量公式}: m_a = m_{\min}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{2b_j\pi i}{g^{\vee}}\right) \tag{12.4}$$

が得られます．この公式は，運動学的な整合性を用いて Ogievetsky らによって得られた質量公式 [7] を統一的に再現し，かつその代数的背景を明確にするものです．

参考文献

[1] D. Bernard, Hidden Yangians in 2D massive current algebras, *Commun. Math. Phys.* **137** (1991), 191 – 208.

[2] D. Bernard, V. Pasquier and D. Serban, Spinons in conformal field theory, *Nucl. Phys.* **B428** (1994), 612 – 628.

[3] S. Coleman and J. Mandula, All possible symmetries of the *S*-matrix, *Phys. Rev.* **159** (1967), 1251 – 1256.

[4] V. G. Drinfel'd, Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, *Soviet Math. Dokl.* **32** (1985), 254 – 258.

[5] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge Univ. Press, 1994.

[6] T. Nakanishi, Fusion, mass, and representation theory of the Yangian algebra, *Nucl. Phys.* **B439** (1995), 441 – 459.

[7] E. I. Ogievetsky, N. Yu. Reshetikhin and P. B. Wiegmann, The principal chiral field in two dimensions on classical Lie algebras: The Bethe-ansatz solution and factorized theory of scattering, *Nucl. Phys.* **B280 [FS 18]**

(1987), 45 − 96.
[8] J. J. Sakurai, ***Modern quantum mechanics***, Addison Wesley, 1985.
[9] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models, ***Ann. Phys.*** **120** (1979), 253 − 291.
[10] 江沢 洋 編, 数理物理への誘い, 遊星社, 1994.

第5話

非可換幾何とゲージ理論

森田克貞

1° はじめに

幾何学という名前からまず連想するのは，だれでもユークリッド幾何であろう．その平行線の公理が他の公理と独立であることがわかって，非ユークリッド幾何が生まれたこともよく知られている．ユークリッド空間内の曲面の幾何を一般化したリーマン幾何は，無限に近い2点間の距離を定める計量が定義された連続な空間（多様体）の幾何学で，一般相対性理論での4次元時空構造のモデルを与えている．

連続な空間の上の各点には，さらにベクトル空間などを貼りつけることができて，ファイバーバンドルや接続の理論というものが生まれる．その場合，貼りついている空間の「点」というのは，もとの空間の対応する点で定義された「関数」とみなされるが，このとき平行移動の概念を使うので，「関数」の微分はもはやふつうの微分ではなく共変微分とよばれるものになる．この共変微分は接続ともよばれ，接続形式というものを定義する．

一方，素粒子論の分野で，ヤンとミルズが，非可換ゲージ理論を1954年に建設した．それに対し，マックスウェルの理論は可換なゲージ理論である．これらが接続の理論であることがわかったのは1960年代であったが，その対応をみると，ゲージ理論にあらわれるゲージ場というのは，接続の理論にあらわれる接続形式に等しく，ゲージ場の強さといわれるものは，曲率にほかならない．ヤン-ミルズの理論は1960年代後半に新しい衣をきて復活し，現在，実験的に大成功を収めている，素粒子の標準模型へと進化していった．

標準模型については，ゲージ理論とは何かから出発して次節で述べるが，この章で取り上げる主題は主にこの新しい衣に関係するから，ここで少し説明を加えておこう．

標準模型は，素粒子の相互作用を，素粒子のもつ非可換な内部対称性に関するゲージ理論によって記述するモデルであるが，すべての素粒子の質量を生成するために，ヒッグス場とよばれるスピンゼロの場が登場するので，とくに，破れたゲージ理論といわれる．すなわち，ゲージ理論はその本来の姿（破れないゲージ理論）ではなく，対称性が自発的に破れたゲージ理論（簡単のため**破れたゲージ理論**とよぶ）という形で自然界に実現していると考えられている．通常，このような理論は連続な空間という考えにたって定式化される．その場合，ゲージ場の方は接続の理論によって幾何学的な意味をもつのに対し，ヒッグス場に関してはそのような意味は全く得られない．

しかし，理論的には，標準模型に登場するゲージ場とヒッグス場に何らかの統一性をもたらすことが望ましい．そのためには，ヒッグス場もまた幾何学的起源をもっているとするのが，もっともわかりやすい．連続な空間という考えにたってこの種の統一的な取り扱いをめざす方法のひとつに，有名なカルツァ-クラインの理論がある．この理論では，ヒッグス場は高次元のゲージ場の成分から生ずると考えるが，高次元の時空を4次元の（平坦な時空である）ミンコウスキー空間に次元還元する操作には任意性が残る．

ここではヒッグス場の幾何学的起源に関して，異なる見方をする数学者コンヌの理論（文献［1］）に焦点を当てよう．すなわち，ゲージ理論を，連続な空間の幾何学的道具を用いて定義するのではなく，**非可換幾何学**（Non-Commutative Geometry，略して NCG）（文献［2］）とよばれる新しい数学的枠組みで定式化すると，破れないゲージ理論は連続な空間を背景にもつのに対し，破れたゲージ理論は，もとの空間が離散的になっているとする理論である．したがって，この理論では，対称性の自発的破れと空間の離散性が関係し，ヒッグス場はその離散性から生ずるものであり，標準模型は NCG

のゲージ理論というかたちで再構成される [3], [2]. この場合の背景の離散的空間は，ふつうの連続な空間に2点空間をかけて得られる．また，この理論では，次元還元の操作が不要となる．

上で，連続な空間の上に貼りつけられた空間は「関数」の集まりであるといったが,「関数」の集まりを対象にする場合，もとの空間は連続でなくともよい．無限に近い2点が考えられない，離散的な空間，たとえば2点空間でも，その上で定義された「関数」の集まりが一定の条件をみたして,「無限小」の概念や計量，微分・積分を，連続な空間の幾何学にも適用できるように定義すれば，より包括的な幾何学を構成できるというのが，コンヌの NCG の考えである．この新しいスタイルの幾何学は，これまでの幾何学と違って，はじめに空間の概念があるというわけではなく，非常に抽象化された公理を使っているので，NCG の公理論的ゲージ理論を限られた紙数の中で説明するのは，とても無理である．

そこで，第3節では，NCG の公理から始めるのではなく，ふつうの連続な空間にとどまったままでも，コンヌのゲージ理論を初等的に解釈する方法があることを説明したいと思う．もちろん，この物理的な方法は，公理論的な NCG のゲージ理論の説明にはなっていないことを，お断りしておかなくてはいけない．そういう意味では数理物理といっても，ほとんど物理の用語しかでてこないのをご容赦願いたい．(2点空間を考える NCG 的見方との関係については，最後に簡単に触れる.）さらに，NCG のゲージ理論により標準模型を再構成する数学的な手続きもすべて文献に譲る．

今後，素粒子といえば，現在の常識に従って，クォークとレプトン，これらの物質粒子の間の力を媒介するゲージ粒子，および，ヒッグス粒子（未発見）をさすことにする．

2°　素粒子の標準模型 [4]

素粒子の振る舞いを記述する数学的形式は，相対論的な場の量子論（文献 [5] 参照）（以下，単に場の理論という）で与えられる．それによれば，素粒子の相互作用はすべて，（局所）場の概念を使って，（局所的な）ラグランジアン（密度）で書かれ，素粒子は場の量子と解釈される．以下ラグランジアンという言葉を使えば，アインシュタインの特殊相対性理論の要求に従って，理論が（非斉次）ローレンツ不変性をみたすものだけを考える．ラグランジアンをミンコウスキーの 4 次元時空で積分すると，作用とよばれる汎関数が生まれ，その停留条件から，ローレンツ共変（あるいは不変）な場の方程式が得られる．その際，素粒子のもつさまざまな自由度は，相互に変換する，場の独立な成分数に反映される．スピンのような自由度に対し，アイソスピンのようなものは内部自由度といわれる．

場の理論が繰り込み理論として，装いを新たに登場した（1949）ずっと前に，ヘルマン・ワイルは，アインシュタインの一般相対性理論で記述される重力場と，マックスウェルの方程式で記述される電磁場を統一する試み（1918）でゲージ原理の考えを提案した．その後，量子力学が完成して，ワイルは，重力場とではなく，電子場と電磁場の相互作用を支配するゲージ原理を可換ゲージ理論として最終的に定式化した (1929)．重力場と電磁場の統一というはじめの意図は実現しなかったが，場の局所的な変換という考えに基づくワイルのゲージ理論は後世に偉大な遺産を残した．この考えを拡張して，場の理論において，相互作用のタイプは局所的な対称性（ゲージ対称性）の要請から決まっている，という考えを**対称性の原理**（または**ゲージ原理**）という．以下では，内部自由度に関する対称性のみを考える．

ゲージ場の典型的な例は電磁場である．よく知られているように，電荷は保存する．これを場の理論では，電子のような電荷をもった物質場の位相を電荷の大きさに応じて変えても，ラグランジアンは変わらない，あるいは不

変であるからと理解する．すると，4元電流密度の（発散がゼロとなる）保存則が得られる．位相は連続的に変えられるので，これを一般化すれば，ある連続変換のもとで，ラグランジアン（あるいは作用）が不変であれば，すなわち理論が対称性をもてば，対応する保存則が存在する．これをネーターの定理という．電荷の保存則はネーターの定理のもっとも簡単な応用例である．

時空を伝播する電子は，運動エネルギーをもつ．それは，ある点の電子場と，それに無限に近い点の電子場との微分的な相互作用（自由な運動エネルギー項，以下，**自由な微分項**という）から生ずる．電子場は局所場なので，時空の各点で独立に位相を変えることができるとすると，自由な微分項はもとの形から変わってしまう．電荷の保存則に導く，大域的な位相変換ではこんなことは起こらなかった．もし，時空の各点で位相不変性が成り立つこと（これを局所的な位相不変性という）を要求すれば，自由な微分項を不変に保つためには，ふつうの微分を**共変微分**（接続）とよばれるものに置き換え，二つの差が非斉次な変換をうけるとせねばならない．この差を**ゲージ場**（**接続形式**）とよぶ．いまの場合，ローレンツ変換性から，ゲージ場はベクトル場であることが結論され，ゲージ場の量子であるゲージ粒子のスピンは1となる．しかし，非斉次な変換をうける，つまり，その変換則に場の量には無関係な項が含まれるので，独立な物理的自由度は2となり，これは電磁場が横波であることと符合する．

共変微分を用いて自由な微分項を変形すると，ゲージ場は電子場とミニマル結合（ゲージ結合あるいは**ゲージ相互作用**ともいう）をする．これからゲージ場の源が保存する4元電流密度であることがわかる．結合の強さはいまの場合，電荷の大きさであるが，一般には**ゲージ結合定数**という．ゲージ粒子も時空を伝播する．そして，物質粒子の間にゲージ結合定数の自乗に比例する力を伝える役割を果たす．（物質粒子の間にゲージ粒子が交換されるというイメージを描いてほしい．）その運動エネルギーは，やはりある点とそれに無限に近い点のゲージ場の微分的な相互作用から生まれる．局所的な位相不変性

からそれを与えるのがマックスウェルの場の強さであることがわかる．局所的な位相不変性をみたすマックスウェルのラグランジアンは，この場の強さから作られ，さらに，ゲージ粒子の質量はゼロとなることが結果する．そして，電子の質量も考慮すれば，マックスウェル-ディラックのゲージ理論である**量子電磁力学**（Quantumelectrodynamics），QEDが導かれる．

局所的な位相変換あるいはそれを拡張したものを第2種ゲージ変換とよび，ゲージ変換のもとで理論が不変になることを**ゲージ不変性**という．これに対し，大域的なゲージ変換を第1種のゲージ変換とよぶ．今後断らない限り，第2種ゲージ変換のことを単にゲージ変換とよぶ．ゲージ不変性の要請から導かれるゲージ場は非斉次なゲージ変換をうける．そのため，ゲージ場のもつ物理的自由度はその成分の数に等しくない．ただし，ゲージ場の種類はまさにその非斉次なゲージ変換の性質によって決まる．ふつうの位相変換の場合は一つであるが，一般の場合は複数ある．ゲージ変換は群をなすので，それをゲージ群とよび，G と書く．ゲージ場の独立な種類（内部自由度に関する成分の数）は G の次元（G の生成子の数）に等しいことがわかっている．

位相変換は可換であるが，一般のゲージ変換は非可換である．前者から可換なゲージ理論，後者から非可換なゲージ理論（ヤン-ミルズ理論[1]）が生まれる．QED は可換なゲージ理論で，$G=U(1)$ である．それに対し，強い相互作用の微視的理論である**量子色力学**（Quantumchromodynamics），QCD は $G=SU(3)$ の非可換なゲージ理論である[2]．もっとも，物質場がゲージ群のどのような表現に属するかは，全く任意である．

なお，電子の質量は，同じ時空点の電子場どうしの相互作用（質量項）により記述される．（電子の伝播は自由な微分項と質量項の和で決定される．）これは非可換なゲージ理論でも変わらない．質量項がゲージ不変になるようなゲージ理論を，ベクトル的なゲージ理論という．QED や QCD はベクトル的なゲージ理論である．

ところで，スピン 1/2 のフェルミ粒子（ディラック粒子）は右巻き，左巻

きの**カイラリティー**とよばれる自由度をもち，その質量項は，カイラリティーを変える形をとる．それに対し，自由な微分項やゲージ相互作用はカイラリティーを変えない．カイラリティーというのは，±1 の値をとり，スピンの成分が運動量の方向に平行か反平行かで +1/2 の値をとったり，−1/2 の値をとったりする，ヘリシティーとよばれる量とは異なるが，零質量の極限では符号が一致するようにとれる．それで，プラスを右巻き，マイナスを左巻きとよぶ．右巻きのカイラリティーをもった素粒子と左巻きのカイラリティーをもった同じ素粒子の場に対し，別々に位相変換（これを**カイラル変換**という）できると考えれば，そのような質量項はカイラルな位相不変性を破ることがわかる．逆にカイラル対称性を要求すると，考えているフェルミ粒子は質量をもちえない．このような場合のゲージ理論を，カイラルゲージ理論といい，フェルミ粒子（フェルミオン）はカイラルである（カイラルフェルミオン）という．

ベクトル型のヤン-ミルズ理論は，質量をもつディラック粒子のゲージ相互作用を記述し，ゲージ粒子だけが質量をもたないのに対し，カイラル型のヤン-ミルズ理論では，ディラック粒子もゲージ粒子も質量をもちえない[3]．

質量の問題は，対称性の自発的破れの理論においても存在する．この理論は，ラグランジアンの対称性が必ずしも基底状態の対称性にはならないことを利用するもので，場の理論のように，無限自由度をもつ量子系に発現する

---

1)　ふつう非可換ゲージ理論のことをヤン-ミルズ理論（1954）というが，ロナルド・ショウや内山龍雄も独立に同じ考えに到達していた（1955−56）．とくに内山は，ゲージ理論の数学的発展に多大の寄与をなした．

2)　可換な群をアーベル群，非可換な群を非アーベル群というので，可換なゲージ理論をアーベル的ゲージ理論，非可換なゲージ理論を非アーベル的ゲージ理論ともいう．

3)　古典論の段階で存在するカイラル対称性は一般に量子化によって破れて，量子異常（アノーマリー）を生ずる．カイラルゲージ理論の場合は，量子異常があれば，繰り込み可能性を損なう．ベクトル型のゲージ理論では（近似的な）カイラル対称性はあっても大域的なので，繰り込み可能性には影響しないが，観測にかかる別の物理的効果をもつことがわかっている．

可能性がある．その場合，南部-ゴールストンの定理というのがあって，大域的な対称性が連続変換により生成されるときは，基底状態が対称的でないとき，対称群の生成子のなかで，基底状態を不変にしない生成子（破れた生成子という）各々に対応して質量ゼロの粒子（N-G ボソン）が生まれることが知られている．π 中間子などは，このような例と考えられているが，零質量の問題は，ゲージ理論と対称性の自発的破れの理論両方にまたがる，場の理論の困難と思われていた．

ところが，到達距離の短い弱い相互作用と，到達距離が無限に長い電磁相互作用をゲージ原理によって，統一的に理解しようとする試みのなかから，この困難を打開する道が開けてきた．このような試みは，1960年前後から模索され続け，ワインバーグとサラムによる統一ゲージ理論に実った (1967–68)．この理論（**グラショウ-ワインバーグ-サラムの理論**，略して **GWS 理論**）にはいくつかのキーワードがある．

ひとつは非可換ゲージ理論であることである．実際ゲージ群は，$G = SU(2)_L \times U(1)_Y$ とされる (グラショウ，1961)．$SU(2)$ は非可換な群で，添え字の L は $SU(2)_L$ という群が左巻きのカイラルフェルミオンにのみ作用することを示す．右巻きのカイラルフェルミオンには $SU(2)_L$ は働かないから，このゲージ理論はカイラル型である．これは，弱い相互作用において，偶奇性が最大限に破れている事実による．$U(1)_Y$ についている Y は弱いハイパーチャージという加法的な量子数を表す．記号 $\times$ は群の直積を意味する．$SU(2)$ の独立な生成子は三つ (I_1, I_2, I_3) ある．また，$U(1)$ の生成子は一つである．ゆえに，上の群の生成子は $3+1=4$ 個で，その数だけ独立なゲージ場が存在する．そのうち二つは生成子 I_1, I_2 に対応して電荷をもち，残りは生成子 I_3, Y に対応して電気的に中性である．しかし，このままではこれらのゲージ粒子もフェルミオンも質量がないままなので，困る．とくに，弱い相互作用の到達距離は非常に短いので，それを媒介するゲージ粒子は重いはずである．なぜなら，力の到達距離は大体，交換される粒子のコンプトン波長に等しいか

ら．

次のキーワードは，零質量の問題にこたえるヒッグス機構（1966）である．まず，最終的に保存するのは電荷 Q だけであるという事実から出発しよう．前にみたように，この保存則は位相不変性から導かれるが，光子が質量ゼロのゲージ粒子であって，保存する 4 元電流密度と結合することを保証するために，局所的な $U(1)_{em}$ 対称性でなければならない．電荷 Q は四つの生成子のうち，電荷を変えない二つの生成子 I_3 と Y の線形結合で，ふつう $Q=I_3+\dfrac{Y}{2}$ とおく．他方，先に述べたように，弱い相互作用の到達距離が短いことは，それを媒介するゲージ粒子の質量が十分大きいことを意味する．つまり，もとの非可換なゲージ対称性は何らかの意味で，Q によって生成される $U(1)_{em}$ 対称性に破れていなくてはならない．この破れが自発的な場合を考えよう．

本来ゲージ粒子は零質量なので，遠距離力を媒介するが，そのような遠距離力がある系では，遠距離力がないことを仮定する南部-ゴールドストンの定理はそのままでは成り立たない．いま，質量の自乗が負の，あるスカラー場（の組）が，ゲージ場と相互作用しているとしよう．この符号の違う質量項と繰り込み可能な自己相互作用項をあわせて，**ヒッグス・ポテンシャル**とよぶ（ラグランジアンの中には逆符号であらわれる）．このヒッグス・ポテンシャルにより，系のエネルギーが極小になる点（基底状態）では，ゲージ対称性が自発的に破れることになる．このとき，大域的な対称性の自発的破れの場合には存在する，零質量の N-G ボソン（のいくつか）が非物理的となり，はじめ零質量であったゲージ粒子（のいくつか）に新しい自由度を与え，それらが有限の質量を獲得し，物理的自由度も，2 から $3=2\times1+1$ に増える．重くなったゲージ粒子の数は，はじめの対称群と破れないで残るその部分群の生成子の数との差（つまり，破れた生成子の数）だけで決まる．いまの場合は，明らかに，$4-1=3$ 個のゲージ粒子が重くなる．このような機構を**ヒッグス機構**とよび，それを生み出すもとになるスカラー場のことを，ヒッグス場とよぶ．観測にかかる物理的なヒッグス粒子は，ゲージ粒子に吸収される分だ

け，もとの成分の数より必ず少ない．ヒッグス場はゲージ不変な形で，カイラルフェルミオンとも湯川型の結合をして，対称性の自発的破れにより，フェルミオンの質量項が導かれる．ヒッグス機構を内蔵するゲージ理論を**ヤン-ミルズ-ヒッグスの理論**という．

ワインバーグとサラムはヤン-ミルズ-ヒッグスの理論を用いて，電磁的相互作用と弱い相互作用の統一（これを**電弱相互作用**という）に成功した．そこで使われるヒッグス場はゲージ群 $SU(2)_L$ の二重項に属し，弱いハイパーチャージはふつう $Y=1$ に規格化される．これをヒッグス・タブレットという．この場合，物理的な中性ヒッグス粒子が一つ予言されているが，今のところまだ発見されていない．また，電弱相互作用のゲージ対称性の自発的破れを，シンボリックに，$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{em}$ と書く．その結果，質量を獲得した荷電ゲージ粒子は，荷電弱ボソン $W^{\pm}$ とよばれ，中性のゲージ粒子の方は，重い中性弱ボソン Z とよく知られた零質量の光子 γ になる．弱ボソンは弱い相互作用を媒介し，光子は電磁相互作用を媒介する．

この理論の繰り込み可能性を証明したのは，ト・フーフトである(1971)．この偉業は場の理論の分水嶺といわれる．これが第三のキーワードである．この証明に本質的なのは，ゲージ対称性が自発的に破れることである．これにより，予言能力を獲得した GWS 理論は，多くの実験的検証を経たあと，1983年には $W^{\pm}$, Z も予言された質量のところに発見された．

第四のキーワードは，物質粒子の世代構造である．すなわち，カイラルフェルミオンであるスピン 1/2 の素粒子は，世代構造とよばれる美しいパターンで存在し，各世代はレプトンと，カラーの自由度をもつクォークとをあわせて，15個の粒子からなる．これは，CP 不変性の破れに関して，小林誠と益川敏英が提唱（1973）したクォークの3世代模型，J/ψ 粒子の発見（1974）とタウ粒子の発見（1975）が大きな動機になって，実験的に現在までのエネルギーで3世代の存在が確認されている．これを「素粒子の世代構造」という表にして示すことにする．

表1　素粒子の世代構造

第1世代	第2世代	第3世代	弱いハイパーチャージ	電荷
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	$Y_L = -1 \cdot 1_2$	$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
e_R	μ_R	τ_R	$Y_R = -2$	$Q = -1$
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	$Y_L = \frac{1}{3} \cdot 1_2$	$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_R \\ s_R \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_R \\ b_R \end{pmatrix}$	$Y_R = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$	$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

素粒子の名前にはそれぞれ歴史的ゆえんがある．クォークは $q = u, d, s, c, b, t$，レプトンは $l = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau$ と書かれ，3世代のカイラルフェルミオンをなしていることが表から読みとれよう[4)]．なお，添え字 L, R は左・右のカイラリティーを示し，L（レフト）フェルミオンは $SU(2)_L$ 二重項（ダブレット），R（ライト）フェルミオンは $SU(2)_L$ 一重項（シングレット）に属する．二重項の上のメンバーは $I_3 = 1/2$，下のメンバーは $I_3 = -1/2$ をもち，一重項の $I_3 = 0$ である．弱いハイパーチャージ Y はレフトとライトで値が違うので，添え字 L, R をつけ，2行目を除き2次の対角行列でその値を書いた(表の中の 1_2 は2次元の単位行列を示す)．電荷 $Q = I_3 + \dfrac{Y}{2}$ の値は素電荷を単位にして，やはり2行目を除き2次の対角行列で与えてある．また，各クォークはカラーとよばれる三つの別種の内部自由度をもち，たとえば，u クォークは u^r, u^b, u^g の3種存在[5)] し，カラーのゲージ群 $SU(3)$ の基本表現に属す

4）念のため，カタカナ読みを記す．クォークは，順にアップ，ダウン，ストレンジ，チャーム，ボトム，トップといい，レプトンは，はじめの三つが，電子的ニュートリノ，ミュー粒子的ニュートリノ，タウ粒子的ニュートリノ（中性微子），あとの三つが，電子，ミュー粒子，タウ粒子という．電子と中性微子は伝統的な日本語名として今でも使われている．中性微子は簡単のため質量ゼロと仮定する．クォークやレプトンで，名前の違う素粒子を区別する量子数を香り（フレーバー）という．

5）カラーの自由度が三つあるため，標準模型はカイラルゲージ理論であるにもかかわらず，量子異常が各世代でなくなっていて，その繰り込み可能性を保証している．

る．このゲージ群に基づく（破れない）非可換ゲージ理論が，前に触れたQCD である．これはクォークの関与する強い相互作用の微視的理論で，クォークの閉じ込めや漸近自由性など著しい性質をもつが，ここでは触れない．

現在，素粒子の標準模型といわれるのは，世代構造を示す素粒子に対する，QCD と GWS 理論をあわせたもので，したがって，

$$G=SU(3)\times SU(2)_L\times U(1)_Y \to H=SU(3)\times U(1)_{em}$$

というヤン-ミルズ-ヒッグスのゲージ理論である．1978年8月東京で開かれた国際会議でその確立が宣言されてから，今年（1998）でちょうど成人式を迎えた．実験との一致は驚くほどよい［6］．

3° 非可換幾何とゲージ理論

標準模型がゲージ場とヒッグス場をうまく取り込んだ，破れたゲージ理論であることが，上の説明でわかっていただけたと思う．まだ理論的に未解決な問題を含むけれども，標準模型の成功は素粒子論における確かな一里塚である．そこを震源として，数多くの理論やアイデアが生まれている．この節では，その中で，コンヌの NCG によるゲージ理論（1990）［1］,［2］あるいはコンヌ-ロットの理論（1990）［3］を取り上げて解説したい．ただし，第1節で述べたように，説明の仕方が，学習院大学の「数理物理 '97」予稿集で採用したやり方とは異なるので，あらかじめお断りしておく[6)]．また，前節までと違って，少し抽象的な数式[7)] が並ぶが，我慢してほしい．

はじめにゲージ原理について，ヤン-ミルズの定式化とコンヌの定式化にみられる違いを，ラグランジアン形式で調べ，次にゲージ場とヒッグス場の統一がコンヌの定式化においてはいかに自然になされるかをみよう．これにより，ヤン-ミルズ-ヒッグスの理論と，NCG のゲージ理論との相違を明確にしたい．（ラグランジアン形式という同じ土俵で議論する点が予稿集と異なる．）

質量のないディラック粒子の伝播は，ディラック場 $\psi(x)$ の自由な微分項により記述できることを前に述べた．引数の x は時空点の座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) を表すが，今後は省略して，ディラック場のことを単に ψ（プサイ）と書く．ディラック粒子のスピンは 1/2 で，さらに粒子・反粒子の自由度があるので，ψ は4成分あるが，それを明示する添え字も省略する．この自由な微分項は，ディラックのガンマ行列とよばれる4次の正方行列で書かれる，自由なディラック演算子 D_0 を用いて，

$$\mathcal{L}_{D_0} = \bar{\psi} D_0 \psi \tag{3.1}$$

というラグランジアンで記述できることがわかっている．ここで，$\bar{\psi}$ は ψ のディラック共役とよばれ，行列の意味で，ψ のエルミート共役 $\psi^\dagger$ に比例する．また，D_0 は微分演算子で，局所的な位相不変性を要求すると，D_0 を共変微分 D_0+A で置き換える必要が生まれ，非斉次な変換則に従うゲージ場 A の存在に導かれる[8)]．すなわち，ゲージ不変なディラック・ラグランジアンは

6）また，予稿集で解説した行列形式や χ-形式については，紙数の関係ですべて割愛する．

7）式を簡潔にするため，ローレンツ不変性を示す，縮約されたローレンツの添え字は書かないことにする．また，以下にでてくる演算子やゲージ場に関連した量はすべて，ディラックのガンマ行列というものを含む．これらをあらわに書かなくとも，推論のじゃまにはなるまい．なお，プランクの定数を 2π で割ったものと，真空中の光速度を1におく自然単位系とよばれるものを使う．

8）一応これを式で追うことにしよう．ディラック場に対し，局所的な位相変換 $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ をすれば，本文の自由な微分項は，

$$\bar{\psi} D_0 \psi \to \bar{\psi} e^{-i\alpha}(D_0 e^{i\alpha}\psi) = \bar{\psi} D_0 \psi + \bar{\psi}(e^{-i\alpha} D_0 e^{i\alpha})\psi$$

と形を変える．もし，α が時空点 x に依存しなければ，この第2項はゼロになるが，いまの場合，依存するので消えないで残る．局所的な位相不変性の要請はラグランジアンの不変性の要請であるから，それでは困る．この第2項を消すために D_0 を D_0+A で置き換え，ゲージ場 A が $A \to e^{i\alpha}Ae^{-i\alpha}+e^{i\alpha}(D_0 e^{-i\alpha})$ と変換することを要求すれば，$\mathcal{L}_{D_0+A} = \bar{\psi}(D_0+A)\psi$ がゲージ不変になる（関係式 $(D_0 e^{-i\alpha})e^{i\alpha} = -e^{-i\alpha}(D_0 e^{i\alpha})$ を使う）．この第2項 $\bar{\psi}A\psi$ がゲージ場とディラック場のゲージ相互作用を記述し，相互作用の強さを決めるゲージ結合定数は A の中に含まれているものとする．非可換なゲージ変換のときは，$e^{i\alpha} \to g$, $e^{-i\alpha} \to g^\dagger$ と書き直せばよい．ただし，g は G の元で，ψ はゲージ群の基本表現に属すとする．なお，この場合，本文の (3.3) 式の場の強さは，$F \to gFg^\dagger$ と変化する．これをゲージ共変な変換則という．

$$\mathcal{L}_{D_0+A} = \overline{\psi}(D_0+A)\psi \tag{3.2}$$

となる．一般の非可換なゲージ変換 $\psi \to \rho(g)\psi$（g は G の元）のもとでも，同じような処方箋(せん)で，非可換なゲージ場 A の存在に導かれるが，その場合，（成分数が増えた）ψ がゲージ群 G のどのような表現 ρ（ロー）に属するかに無関係に，ゲージ場の種類は G の生成子の数だけある．

一方，ゲージ場の強さは，記号 $\wedge$ でディラック行列の反対称化をあらわすことにして，

$$F = (D_0+A) \wedge (D_0+A) \tag{3.3}$$

となることがわかっている．電磁場のような可換なゲージ場のときには，$A \wedge A = 0$ である．このときの F はゲージ場の微分のみを含むマックスウェルの場の強さで，ゲージ変換によって変わらない量となる．よく知られた，ゲージ不変なマックスウェルのラグランジアンは，

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{8e^2}\mathrm{Tr}_D F^2 \tag{3.4}$$

で与えられる．ここで，Tr_D はディラック行列に関してトレース（跡）をとる操作で，e はゲージ結合定数である．非可換なゲージ場 A の場の強さは，可換のときと比べ，二つの点で違いがある．ひとつは，F がゲージ変換のもとで，共変的に変化すること，いまひとつは $A \wedge A \neq 0$ となることである．第一の点はゲージ不変なラグランジアンを作る際，(3.4) 式の Tr_D をディラック行列に関するものだけでなく，内部対称性を表す行列に関するトレースも含めておくこと（Tr と書く）を要求する．このようにして得られるラグランジアンを，ヤン－ミルズのラグランジアンといい，$\mathcal{L}_{YM}$ と書く．一般の $\mathcal{L}_{YM}$ には結合定数がいくつかあらわれる．たとえば，標準模型ではゲージ群が三つの群の直積なので，独立な結合定数は三つある．第二の点は，ゲージ場自身がある定まった，局所的な相互作用をおこなうことを意味する．これは可換なゲージ場と非可換なゲージ場の本質的な違いである．ヤン－ミルズのゲージ理論は $\mathcal{L}_{D_0+A}$ あるいはその一般化と $\mathcal{L}_{YM}$ の和で定義される．$\mathcal{L}_{YM}$ だけで定義される

純粋なヤン-ミルズ理論というものも考えられている．

ところで，コンヌは次のことを注意する．ゲージ群 G は特定の性質で特徴づけられる関数の集まりであるが，ある条件をみたす関数の集まりは一般に代数とよばれるセット $\mathscr{A}$ を作り，$\mathscr{A}$ のユニタリ元の集合 $\mathscr{U}(\mathscr{A})$ は群を作るので，それを G とみなす．すなわち，$G=\mathscr{U}(\mathscr{A})$ とおく．そして，ψ がゲージ群 G の表現に属するというとき，同時に $\mathscr{A}$ の表現にも属することを要求する．群には積が定義されているが，代数には積とともに和も定義されているので，これから ψ はゲージ群 G の限られた表現にしか属しえないことがわかる．

このようなコンヌの観点をいまの場合に応用する．代数 $\mathscr{A}$ は ψ の張るヒルベルト空間の上で表現されているとしよう．つまり，$\mathscr{A}$ の元を a とすると，$\pi(a)\psi$ が定義されているとしよう．記号 π（パイ）は，$\mathscr{A}$ の表現を意味するが，以下煩雑さをさけるため，π は書かず，$\pi(a)\psi$ を単に $a\psi$ と書く．また $a=a(x)$ であるが，引数の x は ψ に対するのと同様省略する．そして，理論は置き換え $\psi \to a\psi, \bar{\psi} \to \bar{\psi}a^{-1}$ のもとで不変であると要請する．ただし，a はその逆元 a^{-1} が存在する，代数 $\mathscr{A}$ の元である．このとき，(3.1) 式は

$$\mathscr{L}_{D_0+A} = \sum_i \bar{\psi} a_i D_0 (b_i \psi) \tag{3.5}$$

と書き直さなくてはいけなくなる．ここで，a_i, b_i は代数 $\mathscr{A}$ の元（の表現）で，置き換え $\psi \to a\psi, \bar{\psi} \to \bar{\psi}a^{-1}$ のもとで同時にすべての $a_i \to aa_i$, $b_i \to b_i a^{-1}$ と約束する．すると明らかに，上式は要求された不変性をもっている．

添え字 i に関する和は次のような理由で必要であることがわかる．つまり，(3.5) 式を作るときの操作のもとで，ローレンツスカラー量 $\bar{\psi}\psi$ が変わらないとする．これは条件 $\sum_i a_i b_i = 1$（単位行列）を仮定する（文献 [7] 参照）ことになる．これからもし和がなければ，代数の元がすべて逆元をもつことになって矛盾するのである．この条件式は，ゲージ変換 $a_i \to ga_i$, $b_i \to b_i g^\dagger$ (g は代数 $\mathscr{A}$ のユニタリ群 $G=\mathscr{U}(\mathscr{A})$ の元）のもとで不変になっているので，理論はいまや，ゲージ変換 $\psi \to g\psi$, $g \in G$ のもとでの不変性をもつことに

なった．（正確には，$\psi \to \pi(g)\psi$ と書いて，群の表現 ρ が代数の表現 π で与えられる場合を考えていることを記すべきだが．）

（3.5）式は，$D_0(b_i\psi) = [D_0, b_i]\psi + b_i(D_0\psi)$ と変形すれば，ヤン‐ミルズの場合と同じく，自由なディラック演算子 D_0 を共変微分 D_0+A で置き換えることに相当する（それで同じ記号 $\mathcal{L}_{D_0+A}$ を使った）が，その際，ゲージ場が

$$A = \sum_i a_i [D_0, b_i] \tag{3.6}$$

という，NCG のゲージ理論で与えられる表式と一致する点が違う．しかし，ゲージ変換のもとでは，

$$A \to \sum_i g a_i [D_0, b_i g^\dagger] = gAg^\dagger + g[D_0, g^\dagger] \tag{3.7}$$

となって，よく知られたゲージ場に対するゲージ変換則を得る．

次にヤン‐ミルズのラグランジアンについて，NCG のゲージ理論では次のような処方箋をとる．（3.6）式に対する場の強さは，

$$G = dA + A^2, \qquad dA \equiv \sum_i [D_0, a_i][D_0, b_i] \tag{3.8}$$

で与えられると定義する．これがゲージ共変，すなわち，（3.7）式のもとで $G \to gGg^\dagger$ となることはすぐわかる．そして，(3.3) 式の F と $X = -\dfrac{1}{4}\mathrm{Tr}_D G$ を用いると，$G = F - 1_4 \otimes X$ という関係にある．コンヌは G の集合と F の集合を等値できる方法を開発して，ヤン‐ミルズのラグランジアンがこの G から導けることを証明した．あるいは，補助場の消去法（文献［7］参照）を利用しても形式的には同じ結果が導ける．このように，コンヌの定式化においてもヤン‐ミルズのゲージ理論が再現されるわけであるが，ここまででではまだ，フェルミオンの表現内容以外，物理的に何ら新しい結果は生まれていない．

ところで，NCG のゲージ理論にあらわれるヤン‐ミルズのゲージ場（3.6）式はきわめて自然にヒッグス場を含む形に一般化されることをみよう．これはディラック演算子 D_0 を共変微分 D_0+A に置き換えるというゲージ理論の定式化では不可能なことである．いまディラック粒子が質量をもっている場

合を考えると，(3.1) 式は

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} D \psi, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \qquad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R) \tag{3.9}$$

となる．ここで，ディラック場はカイラリティーで分解した．レフト，ライトの2次元のカイラル空間では，ディラック演算子 D は2行2列の行列で，$D=D_0+i\gamma_5 M$ と書いたとき，D_0 は対角型のブロック行列であるのに対し，質量行列 M は非対角型のブロック行列となる．それは前に述べたように，自由な微分項はカイラリティーを変えないが，質量項はカイラリティーを変える形をしているからである．(γ_5 は，ガンマファイブとよばれる，関係式 $\gamma_5 D_0 + D_0 \gamma_5 = 0$ をみたすディラック行列で，自乗すると単位行列 1_4 になるように選んである.)

フェルミオンがカイラルのときは，質量項がカイラル対称性を破るので，(3.9) 式はカイラル不変でない．そのため，標準模型のような，カイラルゲージ理論で，フェルミオンの質量を生成するには，(3.1) 式のラグランジアンから出発して，ヤン-ミルズのラグランジアンにヒッグス場を含むような項をつけ加え，ヒッグス・ポテンシャルによって，ゲージ対称性を自発的に破り，そのヒッグス場とフェルミオンの場の湯川結合を考えるというロジックをとる．

これに対し，方程式 (3.1) から方程式 (3.5) を導く方法は，ディラック演算子が D_0 から D に置き換わっても何ら修正をうけないので，自然にヒッグス場が理論に入ってくる点が特徴的である．実際，質量をもつディラック粒子のラグランジアン (3.9) から作られる，前に述べたような置き換えのもとで不変なディラック・ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_D = \sum_i \bar{\psi} a_i D(b_i \psi) = \bar{\psi} \boldsymbol{D} \psi \tag{3.10}$$

と書ける．(いまや，a_i, b_i も対角型のブロック行列と考える必要がある.) ここで，

$$\boldsymbol{D} = D + \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A} = \sum_i a_i [D, b_i] \tag{3.11}$$

は一般化された共変微分である．対応する接続形式 $\mathbf{A}$ を**一般化されたゲージ場**といい，ゲージ変換（a_i, b_i と同じく，g もカイラル空間の 2×2 の対角型のブロック行列とみなす）

$$\mathbf{A} \rightarrow \sum_i g a_i [D, b_i g^\dagger] = g\mathbf{A}g^\dagger + g[D, g^\dagger] \tag{3.12}$$

をうける．分解 $D = D_0 + i\gamma_5 M$ に応じて，

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A + i\gamma_5 \Phi, \\ A &= \sum_i a_i [D_0, b_i], \qquad \Phi = \sum_i a_i [M, b_i] \end{aligned} \tag{3.13}$$

と書けるから，ゲージ場 A と新しいスカラー場 Φ が一つにまとまることになる．さらに，$H = M + \Phi$ とおけば，ガンマファイブを消去する位相変換をおこなって，よく知られたゲージ不変なディラック・ラグランジアン

$$\mathcal{L}_D = \overline{\psi}\mathcal{D}\psi, \qquad \mathcal{D} = D_0 + A - H \tag{3.14}$$

が得られる[9]．この H がヒッグス場の役割をする．なぜかというと，ゲージ変換のもとで，$H \rightarrow gHg^\dagger$ となるが，Φ の方は非斉次な変換をうける．つまり，(3.12) 式から，$\Phi \rightarrow g\Phi g^\dagger + g[M, g^\dagger]$ となる．ゲージ場の非斉次な変換則のときみたように，この変換式から，Φ のすべての成分は物理的自由度に対応しないと結論できる．ただ，質量行列 M と交換するゲージ変換の一部（これは部分群をなす）には，斉次な変換則を示すので，そのような部分変換群に対しては，物理的な自由度を与える．これはヒッグス場のもつ性質にほかならない．なお，フェルミオンはカイラルではなく，質量行列 M が b_i と交換すると，ヒッグス場は生まれないことに注意してほしい．

次に，この H が確かにヒッグス場と同定できること，およびゲージ対称性の自発的破れが，望ましいパターンで導けることを確かめよう．

NCG のゲージ理論では，一般化されたゲージ場 $\mathbf{A}$ に対する場の強さとして，(3.8) 式の G において，$D_0 \rightarrow D$ とおいた

$$\mathbf{G} = d\mathbf{A} + \mathbf{A}^2, \qquad d\mathbf{A} \equiv \sum_i [D, a_i][D, b_i] \tag{3.15}$$

を採用する．これはやはりゲージ共変な変換則に従う．

残った問題は，場の強さ $\boldsymbol{G}$ を用いて，ゲージ不変なヤン-ミルズ型のラグランジアンを作ることである．これは，式（3.8）に基づいて，ヤン-ミルズのラグランジアンを作るのと，数学的には同じ問題で，NCG の微分代数の理論が威力を発揮する．しかし，ここでは，ヒッグス場が存在する場合にいっそう便利である，補助場の消去法（文献［7］参照）を使う．ただし，詳しい計算はいっさい省く．

補助場の消去法の利点は，ゲージ不変なラグランジアンがヤン-ミルズの場合と同様，

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4e^2}\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{G}^2 \tag{3.16}$$

で与えられるとして，計算を進めることができるところにある．（Tr はカイラル空間のトレースも含む．）（3.3）式の $\boldsymbol{F}$ を用いて，$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}-i\gamma_5[D_0+A,H]-1_4\otimes Y$ と書けることが示せる．この $Y=-\dfrac{1}{4}\mathrm{Tr}_D\boldsymbol{G}$ の中に補助場が忍び込んでいる．補助場というのは，その運動方程式が代数方程式になるものなので，$\mathcal{L}_B$ の表式から消去できる．その結果，$\mathcal{L}_B$ はヤン-ミルズ-ヒッグスのラグランジアン $\mathcal{L}_{YMH}$ に移行することが証明できる．前節で述べたヒッグス・ポテンシャルは，この $\mathcal{L}_{YMH}$ に含まれるべきものなのだが，実はいまの場合，ヒッグス・ポテンシャルがゼロになるという結論がでる［7］．つまり，H は対称性の自発的破れを引き起こさない．そのようなものは明らかにヒッグス場と同定できない．

しかしながら，この矛盾は世代の概念を用いると，容易にさけられる．いま，カイラルフェルミオンが複数世代存在し，質量スペクトルに縮退がみら

9) 曽我見［8］は $\mathcal{D}$ から一般化された共変微分を定義し，一般化されたゲージ理論を構成した．ただし，曽我見の一般化された共変微分は（3.14）式が与えられたものとしているため，NCG のゲージ理論との接点である（3.11）式に相当するものは存在しない．

れないとする．すると，$\mathcal{L}_B \to \mathcal{L}_{YMH}$ の過程で望ましいヒッグス・ポテンシャルが生まれることがわかる [7]．つまり，ヒッグス・ポテンシャルの係数は，世代数を N_g としたとき，$N_g = 1$ ならゼロとなるが，$N_g > 1$ のとき正となるわけである．このときには，H は確かにヒッグス場と同定できる．この結論は，$N_g > 1$ のときにしかコンヌの理論を場の理論とみなせないことを意味する．

複数世代の存在と素粒子の質量生成に関するヒッグス機構の間に，このような関係があるということは，コンヌ-ロット [3] が，NCG を用いて，標準模型を再構成するなかで見いだした．そこで，コンヌ-ロットが定式化した NCG のゲージ理論の公理論的側面を少し述べよう．

NCG では，幾何学の概念が作用素代数の言葉に置き換えられる．いま，ユークリッド化した世界で，演算子代数 $\mathcal{A}$ と，（リーマン空間において定義された）自由なディラック演算子 D_0，およびそれが働く，代数の表現空間である，フェルミオンのヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を考える．ある条件をみたすこのセットをコンヌの三組（**spectral triple**）という．この三組は，コンパクトなスピン・リーマン多様体を再現することが証明される．それゆえ，連続多様体の幾何学はコンヌの三つ組（$\mathcal{A}, D_0, \mathcal{H}$）で記述できるといえる．それに対し，質量行列を含むディラック演算子 D はスピン・リーマン多様体と 2 点空間に対応する二つの三つ組のテンソル積によって定義される三つ組（$\mathcal{A}, D, \mathcal{H}$）の構成メンバーとなっている（ここの $\mathcal{A}, \mathcal{H}$ は上のものとは異なり，スピン・リーマン多様体と 2 点空間の直積多様体に対応する）．この 2 点空間の一方にレフト，他方にライトのカイラルフェルミオンを「乗せる」という見方では，ゲージ場は連続な方向への接続形式であるのに対し，ヒッグス場は離散的な方向への接続形式と考えることができる．NCG のゲージ理論が離散空間の上で定式化された場合，一般化されたゲージ場 (3.13) はこのように解釈されるので，フェルミオンの質量行列は 2 点空間において定義される「ディラック演算子」的となり，ヒッグス場が空間の離散性に関連してあらわれることになる．つま

り，ゲージ対称性の自発的破れは空間の離散性に起因すると考える．また，フェルミオンの表現内容が，代数の表現を考えることからくる制約をうける．そして，コンヌ-ロット [3] は，前節の世代構造の表にあらわれるカイラルフェルミオンを一つのスピノル ψ にまとめ，代数を $\mathscr{A}\oplus\mathscr{B}$（$\mathscr{A}$ はフレーバーに，$\mathscr{B}$ はカラーに関係し，可換な部分代数を各一つずつ含む [2]）の形にとって（記号 $\oplus$ は直和をあらわす），ψ に対するその作用をうまく選べば，標準模型を NCG のゲージ理論として再構成できることを示した．なお，NCG では微分とともに，積分も定義されているので，そのゲージ理論ではラグランジアンではなく，作用が直接扱われる．これには，演算子のスペクトル和に関する作用素論の道具が，積分についてのコンヌの定理とともに，重要な役割を果たす．

実は，代数の表現が即ゲージ群の表現を与えない標準模型のような場合には，文献 [2] で使われた両側加群のかわりに，ある代数とその反代数のテンソル積上の加群を考える方がより適切であるとコンヌは指摘した [9]．これは簡単にいうと，まず，ディラック場 ψ とその荷電共役 ψ^c のペアーを考えて，そのペアーに対するゲージ変換を二つの因子に「因数分解」する．そして，各因子を代数の表現とその反表現に結びつけるとするものである．たとえば，標準模型の場合，各因子はフレーバーとカラーの対称性に別々に対応し，弱いハイパーチャージに対応するものは可換なので両因子にあらわれる．コンヌは，この方法を J という記号で書かれる実構造を理論に導入することによって定式化し，前に求めた標準模型の代数 $\mathscr{A}\oplus\mathscr{B}$ から可換な部分代数を一つ除いて，新しく標準模型の代数とその表現を決めた．その後の NCG に基づくゲージ理論についての研究は，コンヌの新しいバージョンが基礎になっている [10]．コンヌはさらに，NCG のゲージ理論は，スペクトル作用とよばれる幾何学的な量によって，重力も含むような形に拡張されることを示した [9]．

4° まとめにかえて

NCG のゲージ理論で対称性の自発的破れが保証されるのは，

1)　フェルミオンはカイラルであること，

2)　カイラルフェルミオンは世代で存在する，

という場合に限られる．条件1）にはとくに新しい考えが含まれているわけではないが，条件2）はコンヌ-ロット［3］がはじめて導いた．（この条件2）はコンヌの場の強さ $\boldsymbol{G}$ の定義（3.15）に依存している．）第3節では，この結論を初等的な方法で求めた．（場の強さに対する別の定義を採用すれば，この結論は得られない．）

NCG のゲージ理論では，ディラック演算子が重要な役割を果たす．ゲージ場に関連した量では，それは必ず交換子の形で理論に顔をだす．その理由は，NCG のコンヌの微分（あるいは計量）が，そのような交換子（のノルム）を用いて定義されるからである．それから出発して，ある拡張された微分代数を定義し，同値関係をおいて，スペクトル和についての定理から，ヤン-ミルズ型の作用を求めると，自動的に望ましいヒッグス・ポテンシャルが得られるというのが，シナリオである．ただ，交換子をとると，時空の曲がりをあらわすゲージ場であるスピン接続というものが落ちる．それで，NCG の立場から，重力の理論を取り扱うには，スペクトル作用を用いる（文献［11］）などする．今のところ，スペクトル作用を積極的に支持する理論的根拠はまだない．しかしながら，重力の理論と標準模型を同一の数学的枠組みで取り扱う方向は，新しい統一理論の可能性を示唆しているように思われる．

最後になりましたが，大同工業大学の加瀬博巳教授，中部大学の奥村吉孝教授および名古屋大学の北門新作教授に深く感謝の意を表します．また，学習院大学で講義する機会を与えてくださった，東京理科大学の荒木不二洋教授，学習院大学の江沢洋教授にも，お礼申し上げます．

参考文献

[1] A. Connes, p. 9 in *The Interface of Mathematics and Particle Physics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

[2] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, New York, 1994.

[3] A. Connes and J. Lott, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **18B** (1990), 29.

[4] R. E. Marshak, *Conceptual Foundations of Modern Particle Physics*, World Scientific, Singapore..., 1993.

[5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, I, II, Cambridge University Press, 1995−1996.

M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995.

九後汰一郎，ゲージ場の量子論，Ｉ，Ⅱ，培風館，1989.

[6] 多くの参考文献の中で，たとえば，次のものをあげておく．

J. Erler and P. Langacker, Status of The Standard Model, UPR-0816-T, hep-ph/9809352.

[7] A. H. Chamseddine, G. Felder and J. Frölich, *Nucl. Phys.* **B395** (1993), 672.

[8] I. S. Sogami, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995), 117 ; **95** (1996), 637.

[9] A. Connes, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 6194 ; *Comm. Math. Phys.* **182** (1996), 155.

[10] 最近の文献としては，たとえば，次のものがある．

C. P. Martín, J. M. Gracia-Bondía and J. C. Vărilly, *Phys. Rep.* **294** (1998), 363.

[11] A. H. Chamseddine and A. Connes, *Commun. Math. Phys.* **186** (1997), 731.

その他，非常に多くの文献を参考にしたが，すべては引用できない点，それらの著者にお許しを乞う．

第6話

非単連結空間上のゲージ量子力学

――正準交換関係と量子群――

新井朝雄

1° 序

この稿の主題は，「2次元の非単連結空間の中を運動する量子的粒子がゲージ場と相互作用をする系の物理」と「量子的な代数の表現」との関連である．なぜこの主題に興味があるのか，これをまず手短に説明しよう．

ここでの基本となる概念は，量子的粒子の配位空間の非単連結性，ゲージ場，そして量子的代数である．

空間の非単連結性は，この空間内の連続閉曲線で連続変形によって互いに移り合えないものが存在することを意味する．この意味で非単連結空間は非自明なトポロジー的構造をもつ．配位空間の非自明なトポロジー的構造は，この空間に関わる量子力学的現象を何らかの形で規定していると推測される．それがどのようなものであるかを明らかにすること，これがこの研究の目的のひとつである[1)]．

非自明な量子力学的現象を引き起こしうる物理的要素のひとつは系に対して外から働く場――外場――である．外場にもいろいろありうるが，上述の観点から言えば，幾何学的な起源をもち，基礎空間のトポロジー的構造と密接な関連をもつようなものが興味ある量子力学的現象を現出させるであろうことは想像に難くない．そのような外場のひとつがゲージ場とよばれるものである．これは，数学的には，線形群のリー環に値をとる1形式である［以下

1) トポロジーと物理との関わりの種々の例については，たとえば，［17］を参照．

の (1.4) を参照]．こうして，非単連結空間上の量子系の重要なクラスのひとつとして，ゲージ場を外場としてもつ量子的粒子系が据えられる[2)].

量子系の基本的構造を規定するのは，状態のヒルベルト空間とそこにおいて物理量として働く自己共役演算子たちである[3)]．ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の $2d$ 個の自己共役演算子 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^{d}$ と $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間 $\mathscr{D}$ があって，$\mathscr{D}$ 上で **正準交換関係**（canonical commutation relations ; CCR と略す）

$$[Q_j, P_k] = i, \quad [Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j, P_k] = 0, \quad j, k = 1, \cdots, d. \tag{1.1}$$

が成り立つとき，$\{\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^{d}\}$ を **自由度 d の CCR の表現**という．ここで，$[X, Y] := XY - YX$（X と Y の交換子）[4)]，i は虚数単位である[5)]．CCR の表現は量子系の物理量を構成するための基本原理のひとつである．自由度 d の CCR の表現 $\{\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^{d}\}$ によって記述される量子系の物理量は Q_j, P_j，$j = 1, \cdots, d$，の “関数” として定義される[6)].

CCR の表現は量子力学を支える代数的構造のひとつである．したがって，非単連結空間上の量子系のように，非自明なトポロジー的構造を内に有する量子系においてはCCR の表現から定まる代数的構造とトポロジーが調和的に融合していることが予想される．この関連を認識すること，これがこの研究の第二の目的である．宇宙の数学的観照の観点から言えば，量子系において，いかに代数的理念とトポロジー的理念が調和的・美的に相互に結び合って興味ある物理現象を現出させうるかを見るということである[7)].

以上は，本稿が関わる研究の一般的な思想的輪郭である．そこで，次に，より具体的にはどういうものを考え，いかなる結果が得られるのかを素描しよう．

$\boldsymbol{D}$ を 2 次元ユークリッド平面 $\boldsymbol{R}^2$ の中の可算無限集合とし，これを

$$\boldsymbol{D} := \{\boldsymbol{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}) \in \boldsymbol{R}^2 \mid n \in \boldsymbol{N}\} \tag{1.2}$$

（$\boldsymbol{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$ は自然数の集合）と表す．この集合を $\boldsymbol{R}^2$ から除いてできる非単連結空間

$$M := \boldsymbol{R}^2 \setminus D \tag{1.3}$$

の中において1個の量子的粒子がゲージ場と相互作用をする量子系を考える．ゲージ場は次のように定義される．

$U(p)$ を p 次元ユニタリ群とし，そのリー環を $\mathrm{u}(p)$ で表す．これは p 次の反エルミート行列の全体である．M 上の $\mathrm{u}(p)$-値1形式

$$A(\boldsymbol{r}) := A_1(\boldsymbol{r})\,dx + A_2(\boldsymbol{r})\,dy, \qquad \boldsymbol{r} = (x, y) \in M \tag{1.4}$$

を構造群（ゲージ群）が $U(p)$ の（M 上の）**ゲージ場**とよぶ．ここで，A_j, $j = 1, 2$, は，M 上の $\mathrm{u}(p)$-値関数であり，連続微分可能であると仮定する．このゲージ場の理論を $U(p)$-ゲージ理論という[8]．

ゲージ場 A から，**ゲージ場の強さ** F が

$$F := dA + A \wedge A \tag{1.5}$$

によって定義される．これは M 上の $\mathrm{u}(p)$-値2形式である．簡単な計算によって，

$$F_A := \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + [A_1, A_2] \tag{1.6}$$

とすれば ($\partial_1 := \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 := \dfrac{\partial}{\partial y}$),

$$F = F_A\, dx \wedge dy \tag{1.7}$$

であることがわかる．$F = 0$ のとき，A は M 上で**平坦**であるという．

---

2) 外場としてのゲージ場の特殊なクラスとして，巨視的な電磁気現象をつかさどる電磁ポテンシャルがある．たとえば，[1] を参照．

3) ヒルベルト空間論の術語および量子力学の公理に関する詳しい叙述については，[7] や [11, 12] を参照．

4) 「$A := B$」は，B によって A を定義することを表す記法．

5) $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1$ (h はプランクの定数）の単位系を用いる．

6) CCR の表現について詳しいことは [6] を参照．

7) この観点は，アハラノフ-ボーム効果を例にとって [5] においてすでに示唆されている．

8) $p = 1$ の場合，すなわち，$U(1)$-ゲージ理論におけるゲージ場 A は，物理的には，磁場をあたえるベクトルポテンシャルを表す．

この量子系の状態のヒルベルト空間として，$\boldsymbol{M}$ 上の $\boldsymbol{C}^p$-値関数 Ψ で $\int_{\boldsymbol{M}}\|\Psi(\boldsymbol{r})\|_{\boldsymbol{C}^p}^2 d\boldsymbol{r}<\infty$ （$\|\cdot\|_{\boldsymbol{C}^p}$ は $\boldsymbol{C}^p$ のノルム）をみたすものからつくられるヒルベルト空間 $L^2(\boldsymbol{M};\boldsymbol{C}^p)$ をとることができる[9]．$\boldsymbol{D}$ のルベーグ測度は0であるから，$L^2(\boldsymbol{M};\boldsymbol{C}^p)$ は自然な仕方で $L^2(\boldsymbol{R}^2;\boldsymbol{C}^p)$ と同一視される．以下，この同一視を用いる．

ゲージ場 A は $\boldsymbol{D}$ の各点 $\boldsymbol{a}_n$ において特異でありうるとする．実は，これから述べる理論にとっては，ゲージ場 A が $\boldsymbol{D}$ の中に特異点をもつことが本質的である．

考察下の量子系における基本的な物理量のひとつは，

$$P_1:=-iD_x-iA_1,\qquad P_2:=-iD_y-iA_2 \tag{1.8}$$

によって定義される，$L^2(\boldsymbol{R}^2;\boldsymbol{C}^p)$ 上の演算子 P_1,P_2 の組 $\boldsymbol{P}=(P_1,P_2)$ である（D_x,D_y はそれぞれ，変数 x,y に関する一般化された偏微分演算子）．これを**物理的運動量演算子**とよぶ[10]．

ベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)\in\boldsymbol{R}^2$ に対して，**物理的運動量演算子 $\boldsymbol{P}$ の $\boldsymbol{v}$ の方向への射影** $P_{\boldsymbol{v}}$ を

$$P_{\boldsymbol{v}}:=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P}:=\sum_{j=1}^{2}v_jP_j \tag{1.9}$$

によって定義する．2節において，この演算子の性質を述べる．

物理的演算子の射影と呼応して，一次独立な二つの2次元定ベクトル $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^2$ に対して，位置演算子 x,y のある種の変形

$$Q_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}}:=\frac{\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}} \tag{1.10}$$

が定義される．ただし，$\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}:=v_1w_2-v_2w_1$ は2次元ベクトルの外積である[11]．

ゲージ場 A が平坦な場合，ある広いクラスに属する一次独立なベクトルの対 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ に対して，$\{Q_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}},Q_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}},\overline{P}_{\boldsymbol{v}},\overline{P}_{\boldsymbol{w}}\}$ （$\overline{P}_{\boldsymbol{v}}$ は $P_{\boldsymbol{v}}$ の閉包）は自由度2のCCRの表現を与えることが示される（3節）．この表現を $\pi_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}}^{A}$ と書こう．そこで問題

となるのは，まず，$\pi^A_{v,w}$ がCCRのシュレーディンガー表現と同値であるか否かを調べることである．この問いに対する完全な答え，すなわち，$\pi^A_{v,w}$ がシュレーディンガー表現と同値になるための必要十分条件が，ゲージ場から定まる平行移動子という対象を用いて記述される．ここで，興味深いのは，シュレーディンガー表現に同値でない場合の表現は，物理的には（非可換な）**アハラノフ-ボーム効果**と対応していることである[12]．

ゲージ場の可能な特異点の集合 $\boldsymbol{D}$ が何らかの幾何的対称性を有する場合には，CCR の表現 $\pi^A_{v,w}$ にも何か特殊な構造が現れてくるであろうと予想するのは自然である．そこで，$\boldsymbol{D}$ として，二つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \boldsymbol{R}^2$ ($\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 > 0$ とする）から形成される無限平行四辺形格子空間

$$\boldsymbol{L} := \{ m\boldsymbol{\omega}_1 + n\boldsymbol{\omega}_2 \mid m, n \in \boldsymbol{Z} \} \tag{1.11}$$

をとり（$\boldsymbol{Z}$ は整数全体），非単連結空間

$$\boldsymbol{M}_L := \boldsymbol{R}^2 \setminus \boldsymbol{L} \tag{1.12}$$

の上の $U(1)$-ゲージ理論を考える（4節以降）．この場合には，ある一般的なクラスのゲージ場 A に対して CCR の表現 $\pi^A_{\omega_1,\omega_2}$ から，**量子平面**とよばれる代数のヒルベルト空間表現が構成される[13]．一方，量子平面の表現は（ある条件のもとで）**量子群**とよばれる代数の表現を誘導する[14]．こうして，CCR の表現 $\pi^A_{\omega_1,\omega_2}$ から $L^2(\boldsymbol{R}^2; \boldsymbol{C}^1) = L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上での量子群の表現を構成することができる．ここに上述したような意味における，代数的理念とトポロジー的な理念の調和的で美的な関連の一部が明るみに出される．

9）内積は，$(\Psi, \Phi) := \int_M (\Psi(\boldsymbol{r}), \Phi(\boldsymbol{r}))_{\boldsymbol{C}^p} d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{R}^2} (\Psi(\boldsymbol{r}), \Phi(\boldsymbol{r}))_{\boldsymbol{C}^p} d\boldsymbol{r}$ ［$(\cdot,\cdot)_{\boldsymbol{C}^p}$ は $\boldsymbol{C}^p$ の内積］.

10）**速度演算子**ともいう．

11）$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が一次独立ならば，$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} \neq 0$ に注意.

12）この点については，$U(1)$-ゲージ理論の場合に，［6］ですでに詳しく解説した.

13）量子平面の定義については5節を参照.

14）量子群の定義については6節を参照.

2° 物理的運動量演算子の射影

この節から，序において概要を述べた理論の数学的に詳しい内容を叙述する．ただし，提示する定理や命題の証明はしない．証明については，[2, 3, 4, 8, 9] を参照されたい．

序の (1.9) によって定義される演算子 P_v の性質を調べるために，$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合を導入する：

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{D}) := \{ v \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\} \mid \text{数列} \{\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{\infty} \text{は集積点をもたない} \} \quad (2.1)$$

定理 2.1　すべての $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})$ に対して，P_v は本質的に自己共役である．

この定理によって，各 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})$ に対して，P_v の閉包 $\bar{P}_v$ は自己共役である．$\bar{P}_v$ のスペクトル，絶対連続スペクトル，特異連続スペクトル，点スペクトルをそれぞれ，$\sigma(\bar{P}_v)$，$\sigma_{\mathrm{ac}}(\bar{P}_v)$，$\sigma_{\mathrm{sc}}(\bar{P}_v)$，$\sigma_{\mathrm{p}}(\bar{P}_v)$ とする [15)]．

定理 2.2　すべての $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})$ に対して，

$$\sigma(\bar{P}_v) = \sigma_{\mathrm{ac}}(\bar{P}_v) = \boldsymbol{R}, \qquad \sigma_{\mathrm{p}}(\bar{P}_v) = \sigma_{\mathrm{sc}}(\bar{P}_v) = \phi. \quad (2.2)$$

$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})$ とする．このとき，$\bar{P}_v$ によって生成される強連続1パラメーターユニタリ群

$$T_v(t) = e^{it\bar{P}_v}, \qquad t \in \boldsymbol{R} \quad (2.3)$$

が考えられる．この群の具体的な作用の形を述べるために，ある概念を導入する．

p 次の複素行列の全体を $M_p(\boldsymbol{C})$ で表す．$a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$ とし，$B : [a, b] \to M_p(\boldsymbol{C})$ を閉区間 $[a, b]$ 上の $M_p(\boldsymbol{C})$-値連続関数とする．$\{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ を $[a, b]$ の分割で

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = b,$$

$$\max_{k=1,\cdots,n} |s_k - s_{k-1}| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

をみたすものとする．このとき，B に対する**乗積積分** (product integral)

$\prod_a^b e^{B(s)ds}$ が

$$\prod_a^b e^{B(s)ds} := \lim_{n\to\infty} e^{B(s_n)(s_n-s_{n-1})} e^{B(s_{n-1})(s_{n-1}-s_{n-2})} \cdots e^{B(s_1)(s_1-s_0)} \tag{2.4}$$

によって定義される［14］．便宜上，$\prod_a^a e^{B(s)ds} := I$ とする．

C を $\boldsymbol{M}$ の中の連続で区分的に微分可能な曲線とし，その媒介変数表示が $\gamma(\tau) = (\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau))$，$\tau \in [a, b]$（$a < b$, $a, b \in \boldsymbol{R}$）であたえられるとする．このとき，

$$A(\gamma(\tau)) = \sum_{j=1}^{2} A_j(\gamma(\tau)) \frac{d\gamma_j(\tau)}{d\tau} d\tau$$

は (a, b) 上の $\mathrm{u}(p)$-値 1 形式をあたえる．これに同伴する乗積積分

$$W_A[C] := \prod_a^b e^{-A(\gamma(\tau))} \tag{2.5}$$

を曲線 C に沿っての**平行移動子**とよぶ[16]．容易にわかるように，$W_A[C] \in U(p)$ である．

注意 2.1　$W_A[C]$ の幾何学的意味．直積束 $\boldsymbol{M} \times U(p)$ に同伴するベクトル束（ファイバーは $\boldsymbol{C}^p$）の，点 $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{M}$ におけるファイバーを $V_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{C}^p$（$\boldsymbol{C}^p$ のコピー）で表す．曲線 C の始点を $\boldsymbol{a}$，終点を $\boldsymbol{b}$ とすれば，$W_A[C]$ は，A を接続形式として，$V_{\boldsymbol{a}}$ のベクトルを $V_{\boldsymbol{b}}$ のベクトルに平行移動する演算子である[17]．

注意 2.2　任意の $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in \boldsymbol{M}$ と $j, k = 1, 2$ に対して，$A_j(\boldsymbol{r})$ と $A_k(\boldsymbol{r}')$ が可換ならば，すなわち，$[A_j(\boldsymbol{r}), A_k(\boldsymbol{r}')] = 0$ ならば，$W_A[C] = \exp\left(-\int_C A\right)$ となる．

点 $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{r}' \in \boldsymbol{R}^2$ へと至る直線を $L_{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'}$ によって表す：

$$L_{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'} := \{(1-t)\boldsymbol{r} + t\boldsymbol{r}' \mid t \in [0, 1]\}. \tag{2.6}$$

定理 2.3　すべての $t \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{v} \in V(\boldsymbol{D})$, $\Psi \in L^2(\boldsymbol{R}^2; \boldsymbol{C}^p)$ に対して，

$$(T_{\boldsymbol{v}}(t)\Psi)(\boldsymbol{r}) = W_A[L_{\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}}]\Psi(\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{v}) \qquad \text{a.e. } \boldsymbol{r}. \tag{2.7}$$

15）自己共役演算子のスペクトルの分類については，［18］の § 2.4 を見よ．

16）物理学の文献では，通常，$W_A[C] = P\exp\left(-\int_C A\right)$ と表記される（P は "path-ordered" の意．

17）たとえば，［15, 4 章］を参照．

ここで，「a.e. $\boldsymbol{r}$.」は「2次元ルベーグ測度に関してほとんどいたるところ（almost everywhere）の点 $\boldsymbol{r}$」という意味である．

注意 2.3　注意 2.1 を考慮すると，(2.7) は次のような幾何学的意味をもつ：a.e. $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，$(T_v(t)\Psi)(\boldsymbol{r})$ は，V_{r+tv} のベクトル $\Psi(\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{v})$ を直線 $L_{r+tv:r}$ に沿って平行移動して得られる，V_r のベクトルを表す．

注意 2.4　すべての $t \in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ と $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})$ に対して，$t\overline{P}_v = \overline{P}_{tv}$ が成り立つ．したがって，

$$T_v(t) = T_{tv}(1). \tag{2.8}$$

ゆえに，$\overline{P}_v$ によって生成される強連続1パラメーターユニタリ群に関するかぎり，ユニタリ演算子

$$T_v := T_v(1) \tag{2.9}$$

を考えれば十分である．

ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})$ は一次独立であるとし，点 $\boldsymbol{r}$ を出発して，4個の点 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{r}+\boldsymbol{w}$ を頂点とする平行四辺形の周囲を $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}+\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{r}+\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{r}$ のように一巡する閉曲線を $C_r(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ とする：

$$\begin{aligned} C_r(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := &\{\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{v} \mid 0 \le \lambda \le 1\}\circ\{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}+\lambda\boldsymbol{w} \mid 0 \le \lambda \le 1\} \\ &\circ\{\boldsymbol{r}+(1-\lambda)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \mid 0 \le \lambda \le 1\} \\ &\circ\{\boldsymbol{r}+(1-\lambda)\boldsymbol{w} \mid 0 \le \lambda \le 1\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

これに対して，$L^2(\boldsymbol{R}^2; \boldsymbol{C}^p)$ 上のユニタリ演算子 $\widehat{W}^A_{v,w}$ で

$$(\widehat{W}^A_{v,w}\Psi)(\boldsymbol{r}) = W_A[C_r(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})]\Psi(\boldsymbol{r}), \qquad \text{a.e. } \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{M},\ \Psi \in L^2(\boldsymbol{R}^2; \boldsymbol{C}^p) \tag{2.11}$$

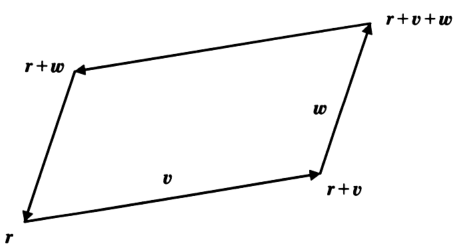


図1　閉曲線 $C_r(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

となるものがただひとつ存在することが示される．この演算子は，ユニタリ演算子の集合 $\{T_v \mid \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})\}$ の交換特性を特徴づける：

定理 2.4 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を上のものとする．このとき，

$$T_v T_w = (\widehat{W}^A_{v,w})^{-1} T_w T_v. \tag{2.12}$$

次の事実は，ユニタリ演算子の集合 $\{T_{v_j}(t)\}_{j=1}^n$，$[n \in \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{v}_j \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})]$ によって生成される代数を考察するにあたって重要である．

命題 2.5 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})$ とする．このとき，T_v-不変な部分空間で $\{0\}$ 以外のものはすべて無限次元である．

3° 2次元定ベクトルの対により指定される CCR の表現

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})$ を一次独立なベクトルとすれば，序の (1.10) によって自己共役演算子 $Q_{v,w}$ が定義される．見やすくするために，

$$Q_1 = Q_{v,w}, \qquad Q_2 = Q_{w,v} \tag{3.1}$$

$$\Pi_1 = \overline{P}_v, \qquad \Pi_2 = \overline{P}_w \tag{3.2}$$

とおこう．

$\boldsymbol{M}$ 上の無限回微分可能な $\boldsymbol{C}^p$-値関数でその台が $\boldsymbol{M}$ の中の有界閉集合となるものの全体を $C_0^\infty(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{C}^p)$ で表す．これは $L^2(\boldsymbol{R}^2; \boldsymbol{C}^p)$ で稠密な部分空間である．

演算子 $Q_j, \Pi_j,\ j = 1, 2$，が部分空間 $C_0^\infty(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{C}^p)$ 上で交換関係

$$[Q_j, Q_k] = 0, \quad [Q_j, \Pi_k] = i\delta_{jk}, \qquad j, k = 1, 2 \tag{3.3}$$

$$[\Pi_1, \Pi_2] = -\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} F_A \tag{3.4}$$

をみたすことは直接の計算から容易にわかる．これから，次の事実が得られる：

命題 3.1　三つ組

$$\pi^A_{v,w} := \{L^2(\boldsymbol{R}^2; \boldsymbol{C}^p),\ C_0^\infty(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{C}^p),\ \{Q_j, \Pi_j\}_{j=1}^2\} \tag{3.5}$$

は，ゲージ場 A が平坦であるとき，かつこのときにかぎり自由度 2 の CCR の表現をあたえる．

$\boldsymbol{M}$ 上で平坦なゲージ場の全体を $\mathscr{A}_{\text{flat}}(\boldsymbol{M}; \mathrm{u}(p))$ と記す．

CCR の表現 $\pi^A_{v,w}$ $[A \in \mathscr{A}_{\text{flat}}(\boldsymbol{M}; \mathrm{u}(p))]$ がシュレーディンガー表現に同値であるか否かは，閉曲線 $C_r(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ に対する平行移動子によって完全に特徴づけられる：

定理 3.2　$A \in \mathscr{A}_{\text{flat}}(\boldsymbol{M}; \mathrm{u}(p))$ とする．このとき，CCR の表現 $\pi^A_{v,w}$ が自由度 2 のシュレーディンガー表現に同値であるための必要十分条件は，すべての $s, t \in \boldsymbol{R}$ に対して，$\widehat{W}^A_{sv,tw} = I$ が成立することである．

定理 3.2 によって，ある s, t に対して，$\widehat{W}^A_{sv,tw} \neq I$ であるならば，CCR の表現 $\pi^A_{v,w}$ はシュレーディンガー表現に同値でない．この場合は，物理的には，アハラノフ-ボーム効果に対応していることが示される．これについては，[2, 3, 6, 8] を参照．

4° 無限格子上に特異点をもつゲージ場

話をより具体的にするために，序の (1.11) によって定義される無限平行四辺形格子 $\boldsymbol{L}$ 上に特異点をもつ $U(1)$-ゲージ理論を考察しよう．したがって，系の配位空間は (1.12) によって与えられる $\boldsymbol{M}_L$ である．ベクトル $\boldsymbol{\omega}_j$ に対応する複素平面の点を $\omega_j := \omega_{j1} + i\omega_{j2}$ とし，$\Omega_{m,n} := m\omega_1 + in\omega_2$ とおけば，空間 $\boldsymbol{M}_L$ に対応する，複素平面の領域は

$$M_L := \boldsymbol{C} \setminus \{\Omega_{m,n}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}} \tag{4.1}$$

である．

Mittag-Lefflerの定理により，次の（M.1)，（M.2）をみたす，$\boldsymbol{C}$ 上の有理型関数 f が存在する：(M.1) f は M_L 上で正則；(M.2) 各点 $\Omega_{m,n}$ での f の留数の実部は，m, n によらず一定の値をとる．この値を $r(f)$ で表す．このような有理型関数の全体を $\mathcal{M}_c$ とする．

例 4.1 Weierstrass のゼータ関数

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum_{(m,n)\in Z^2\setminus\{0\}} \left\{ \frac{1}{z-\Omega_{m,n}} + \frac{1}{\Omega_{m,n}} + \frac{z}{\Omega_{m,n}^2} \right\} \tag{4.2}$$

の定数倍 $\alpha\zeta$（$\alpha \in \boldsymbol{C}$）は，$\mathcal{M}_c$ に属する．この場合，$r(\alpha\zeta) = \mathrm{Re}\,\alpha$ である[18]．

各 $f \in \mathcal{M}_c$ に対して，ゲージ場

$$A^f = A_1^f dx + A_2^f dy \tag{4.3}$$

を

$$\begin{aligned} A_1^f(x, y) &:= -i\,\mathrm{Im}\, f(x+iy), \\ A_2^f(x, y) &:= -i\,\mathrm{Re}\, f(x+iy), \end{aligned} \qquad (x, y) \in \boldsymbol{M}_L \tag{4.4}$$

によって定義する．このとき，$A_j^f \in C^\infty(\boldsymbol{M}_L)$ であり，f に対するコーシー－リーマン方程式のひとつは，A^f が平坦であることを導く．したがって，$A^f \in \mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(\boldsymbol{M}_L; \mathrm{u}(1))$．ゆえに，$W_{\omega_1,\omega_2}^{A^f}$ ［(3.5) において，$A = A^f$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}_1$，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\omega}_2$ の場合］は自由度 2 の CCR の表現をあたえる．

いまの場合，

$$q_f := e^{2\pi i r(f)} \tag{4.5}$$

とおくと，

$$W_{\omega_1,\omega_2}^{A^f}(\boldsymbol{r}) = q_f \tag{4.6}$$

が成立する．ゆえに，$A = A^f$ に対する，射影された物理的運動量演算子を $P_{\boldsymbol{v}}^f$ として，

$$U_j^f := \exp(i\overline{P}_{\omega_j}^f), \qquad j = 1, 2 \tag{4.7}$$

とおけば，定理 2.4 から，

18） 複素数 z に対して，$\mathrm{Re}\, z$，$\mathrm{Im}\, z$ はそれぞれ，z の実部，虚部を表す．

$$U_2^f U_1^f = q_f U_1^f U_2^f \tag{4.8}$$

が成り立つことになる．演算子 U_j^f はユニタリであるから，(4.8) は，

$$(U_2^f)^*(U_1^f)^* = q_f(U_1^f)^*(U_2^f)^*, \quad U_1^f(U_2^f)^* = q_f(U_2^f)^*U_1^f, \\ (U_1^f)^*U_2^f = q_f U_2^f(U_1^f)^* \tag{4.9}$$

を導く．ここに導出された代数的構造は，ある普遍的な理念の現れである．これについては節をあらためて述べることにしよう．

5° 量子平面

$q \neq 0$ を複素数とし，関係式

$$qXY = YX \tag{5.1}$$

にしたがう二つの元 X, Y によって生成される代数を**量子平面**（quantum plane）という［16, Chapter IV］．量子平面を $\boldsymbol{C}_q^2$ によって表す．q を**変形パラメーター**とよぶ．

量子平面の変形パラメーター q が $q = e^{2\pi i\theta}$（$\theta \in \boldsymbol{R}$）という形のとき，$\boldsymbol{C}_q^2$ は**回転代数**（rotation algebra）とよばれる．これを $\mathscr{R}_\theta$ で表す．この代数は θ が有理数（無理数）のとき，有理的（無理的）といわれる．無理的回転代数は**非可換トーラス**ともよばれる［19, Chapter 4, Example 4.3.2］．

ベクトル空間 V に対して，V 上の線形演算子の全体を $\mathrm{End}(V)$ で表す[19]．$\boldsymbol{C}$ 上の代数 A に対して，ベクトル空間 V と代数的準同形 $\pi: \mathsf{A} \to \mathrm{End}(V)$ の組（π, V）を A の V 上での**表現**という[20]．V が有限（無限）次元のとき，表現（π, V）は有限（無限）次元であるという．

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ に対して，$\mathscr{H}$ 上の有界線形演算子の全体を $\mathsf{B}(\mathscr{H})$ で表す．$\mathscr{H}$ と準同形写像 $\pi: \mathsf{A} \to \mathsf{B}(\mathscr{H})$ の組（$\pi, \mathscr{H}$）を A の $\mathscr{H}$ 上での**有界表現**ということにする．

代数 A の表現（π, V）において，$\pi(\mathsf{A}) := \{\pi(A) \mid A \in \mathsf{A}\}$ によって不変な

る，V の部分空間が $\{0\}$ または V に限られるとき，表現 (π, V) は**既約**であるという．

$W \neq \{0\}$ を $\pi(\mathsf{A})$-不変な，V の部分空間とし，$\pi_W(A)\psi := \pi(A)\psi$, $\psi \in W$, $A \in \mathsf{A}$, とすれば，(π_W, W) は，W 上での A の表現をあたえる．これが既約であるとき，(π_W, W) を表現 (π, V) の（ひとつの）**既約成分**という．

量子平面の表現の基本的な例をあげておこう．

例 5.1　$q \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ を定数とし，$\mathscr{F}(\boldsymbol{C})$ を $\boldsymbol{C}$ 上の関数全体からなる複素ベクトル空間とする．

$$(\pi(X)f)(z) := zf(z), \quad (\pi(Y)f)(z) := f(qz), \quad z \in \boldsymbol{C}, f \in \mathscr{F}(\boldsymbol{C})$$

によって，対応 $\pi : \{X, Y\} \to \mathrm{End}(\mathscr{F}(\boldsymbol{C}))$ を定義すれば，$(\pi, \mathscr{F}(\boldsymbol{C}))$ は量子平面 $\boldsymbol{C}_q^2$ の表現をあたえる．

例 5.2　$\{L^2(\boldsymbol{R}^2), C_0^\infty(\boldsymbol{R}), \{x, p\}\}$ を 1 自由度の CCR のシュレーディンガー表現とし（$p := -iD_x$；D_x は変数 $x \in \boldsymbol{R}$ による一般化された微分演算子，$C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$ 上の無限回微分可能な関数で台が有界となるものの全体），

$$\pi(X) := q^x \text{（関数 } q^x \text{ によるかけ算演算子）}, \quad \pi(Y) := e^{ip}$$

によって対応 $\pi : \{X, Y\} \to \mathrm{End}(C_0^\infty(\boldsymbol{R}))$ を定義すると，$(\pi, C_0^\infty(\boldsymbol{R}))$ は量子平面 $\boldsymbol{C}_q^2$ の表現をあたえる．$\log q$ が純虚数のときは，この表現は，$\{x, p\}$ のヴァイル（Weyl）型表現の特別な場合になっている．だが，$\log q$ が純虚数でない場合は，$(\pi, C_0^\infty(\boldsymbol{R}))$ を $L^2(\boldsymbol{R})$ 上での表現とみなすと，$\pi(X)$ は非有界演算子であるから，$(\pi, C_0^\infty(\boldsymbol{R}))$ は量子平面の非有界表現の例をあたえる．

(4.8) から次の事実が得られる：

---

19)　"End" は endomorphism（自己準同形写像）の意．

20)　写像 $\pi : \mathsf{A} \to \mathrm{End}(V)$ が代数的準同形であるとは，任意の $A, B \in \mathsf{A}$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$ に対して，$\pi(\alpha A + \beta B) = \alpha\pi(A) + \beta\pi(B)$, $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$, が成り立つときをいう．

定理 5.1　$f \in \mathcal{M}_c$ とし，U_j^f を前節のものとする．このとき，次の対応 $\pi_f : \{X, Y\} \to \mathsf{B}(L^2(\boldsymbol{R}^2))$ は $\mathcal{R}_{r(f)}$ ($\theta = r(f)$ の場合の回転代数) の $L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上での有界表現を定義する：

$$\pi_f(X) := U_1^f, \qquad \pi_f(Y) := U_2^f. \tag{5.2}$$

こうして，前節の $U(1)$-ゲージ理論に対して回転代数のヒルベルト空間表現が同伴することがわかる．

各 $t \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$V_1(t) = \exp(itQ_{\omega_1, \omega_2}), \qquad V_2(t) = \exp(itQ_{\omega_2, \omega_1}) \tag{5.3}$$

とおく．このとき，

$$V_j(t)\, U_k^f = e^{-it\delta_{jk}} U_k^f V_j(t), \qquad t \in \boldsymbol{R} \tag{5.4}$$

が成り立つ．したがって，とくに，

$$V_j(2\pi)\, U_k^f = U_k^f V_j(2\pi). \tag{5.5}$$

これは，$V_j(2\pi)$ が $\pi_f(\mathcal{R}_{r(f)})$ のすべての元と可換であることを意味する．この事実から次の結果が導かれる：

命題 5.2　表現 $(\pi_f, L^2(\boldsymbol{R}^2))$ は既約ではない．

命題 5.2 を応用すると，次のこともわかる：

命題 5.3　表現 $(\pi_f, L^2(\boldsymbol{R}^2))$ の任意の既約成分は無限次元である．

注意 5.1　(5.4) は

$$U_j^f V_j(2\pi r(f)) = q_f V_j(2\pi r(f))\, U_j^f, \qquad j = 1, 2 \tag{5.6}$$

も導く．したがって，対 $(V_1(2\pi r(f)), U_1^f)$，$(V_2(2\pi r(f)), U_2^f)$ は $\mathcal{R}_{r(f)}$ の $L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上でのヒルベルト空間表現をあたえる．これらについても上と同様の議論ができる．

注意 5.2　$|q| = 1$ の場合の量子平面（回転代数）について，そのヒルベルト空間上での非有界な自己共役表現——$\pi(X)$，$\pi(Y)$ が自己共役で，少なくとも一方が非有界——が Schmüdgen [20, 21] によって詳しく研究されている．

注意 5.3　生成子がユニタリ演算子で実現される無理的回転代数の C^*-代数的な

取り扱いが［13, Chapter VI］（およびそこに引用されている文献）に見られる．

6° 量子群 $U_q(sl_2)$ のヒルベルト空間表現

前節の続きを議論する．まず，量子平面の表現から，$U_q(sl_2)$ とよばれる量子群の表現がある方法で構成されることを述べ，これを応用して，回転代数 $\mathcal{R}_{r(f)}$ の表現から，$L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上での $U_q(sl_2)$ のヒルベルト空間表現を構成する．

6.1　量子群 $U_q(sl_2)$

$q \neq 0, 1, -1$ を複素数とする．4 個の元 E, F, K, K^{-1} で関係式

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1 \tag{6.1}$$

$$KEK^{-1} = q^2E \tag{6.2}$$

$$KFK^{-1} = q^{-2}F \tag{6.3}$$

$$[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{6.4}$$

をみたすものから生成される代数を**量子群** $U_q(sl_2)$ とよぶ［16, Chapter VI, Definition VI.1.1］．この代数のすべての元と可換となる元として，

$$C := \frac{qK - 2 + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2} + FE \tag{6.5}$$

がある．これは $U_q(sl_2)$ の**カシミール**（Casimir）**元**とよばれる．

(π, V) を $U_q(sl_2)$ の表現とする．演算子 $\pi(K)$ の 0 でない固有値を V の**ウェイト**といい，これに属する固有ベクトルを**ウェイトベクトル**とよぶ．ウェイト λ のウェイトベクトル v（したがって，$\lambda \neq 0$，$v \neq 0$，$\pi(K)v = \lambda v$）が $\pi(E)v = 0$ をもみたすならば，v はウェイト λ の**最高ウェイトベクトル**とよばれる．ベクトル空間 V が（最高）ウェイトベクトルをもつ場合，表現 (π, V) は（最高）ウェイトベクトルをもつという．

6.2　構成法 I

次の補題は量子平面の表現から $U_q(sl_2)$ の表現を構成する仕方のひとつをあたえる．

命題 6.1（cf. [23]）（π, V）を量子平面 $\boldsymbol{C}_q^2$ の表現で，$\pi(X)$，$\pi(Y)$（X, Y は $\boldsymbol{C}_q^2$ の生成元）が V 上の全単射となっているようなものとする．関係式

$$abq = a'b'q^{-1} = -\frac{1}{(q-q^{-1})^2} \tag{6.6}$$

をみたす複素定数 a, b, a', b' を任意に固定する．このとき，次の対応

$$\Pi : \{E, F, K, K^{-1}\} \to \mathrm{End}\,(V)$$

は $U_q(sl_2)$ の表現を定義する：

$$\Pi(E) = \pi(X)\{a\pi(X) + a'\pi(X)^{-1}\}\pi(Y)^{-1} \tag{6.7}$$

$$\Pi(F) = \pi(Y)\{b\pi(X) + b'\pi(X)^{-1}\}\pi(X)^{-1} \tag{6.8}$$

$$\Pi(K) = \pi(X)^2 \tag{6.9}$$

$$\Pi(K^{-1}) = \pi(X)^{-2}. \tag{6.10}$$

この表現における，カシミール元 C の対応演算子は

$$\Pi(C) = a'b + ab' - \frac{2}{(q-q^{-1})^2} \tag{6.11}$$

である．

さて，4 節の $U(1)$-ゲージ理論において，

$$r(f) \notin \frac{\boldsymbol{Z}}{2} \tag{6.12}$$

を仮定しよう．このとき，$q_f^2 \neq 1$ である．

複素定数 a, b, a', b' を

$$abq = a'b'q^{-1} = \frac{1}{(q_f - q_f^{-1})^2} = \frac{1}{4\sin^2 2\pi r(f)} \tag{6.13}$$

をみたすようにとる．

命題6.1と定理5.1により，次の定理が得られる：

定理6.2　次の対応 $\Pi_f:\{E, F, K, K^{-1}\}\to \mathsf{B}(L^2(\boldsymbol{R}^2))$ は，$L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上での $q=q_f$ に対する $U_q(sl_2)$ の有界表現をあたえる：

$$\Pi_f(E) = U_1^f\{aU_1^f + a'(U_1^f)^{-1}\}(U_2^f)^{-1} \tag{6.14}$$

$$\Pi_f(F) = U_2^f\{bU_1^f + b'(U_1^f)^{-1}\}(U_1^f)^{-1} \tag{6.15}$$

$$\Pi_f(K) = (U_1^f)^2, \qquad \Pi_f(K^{-1}) = \pi(U_1^f)^{-2}. \tag{6.16}$$

表現 $(\Pi_f, L^2(\boldsymbol{R}^2))$ のいくつかの性質を列挙する．

定理6.3　表現 $(\Pi_f, L^2(\boldsymbol{R}^2))$ はウェイトベクトルをもたない．とくに，$\Pi_f(U_{q_f}(sl_2))$-不変で非自明な有限次元部分空間は存在しない．

定理6.4　$a'=b^*$，$b'=a^*$ と仮定する．このとき

(i)　$\Pi_f(U_{q_f}(sl_2))$ は $\mathsf{B}(L^2(\boldsymbol{R}^2))$ の $*$-部分代数である．

(ii)　表現 $(\Pi_f, L^2(\boldsymbol{R}^2))$ は完全可約である．

$\mathsf{B}(L^2(\boldsymbol{R}^2))$ の部分集合 A に対して，その演算子ノルムの位相による閉包を $\overline{\mathsf{A}}$ で表す．

$(U_1^f)^{\pm 2}$，U_2^f，$(U_2^f)^{-1}$ によって生成される C^*-代数を F_f とする．

定理6.5　$|a|\neq|a'|$，$|b|\neq|b'|$ を仮定する．このとき，

$$\mathsf{F}_f=\overline{\Pi_f(U_{q_f}(sl_2))}.$$

6.3　構成法 II

次の命題は，$U_q(sl_2)$ の表現について，命題6.1とは別の構成の仕方をあたえる．

命題6.6（cf. [23]）(π, V) を $C_{q^2}^2$ の表現（すなわち，$q^2\pi(X)\pi(Y) = \pi(Y)\pi(X)$）で次の性質をもつものとする：

（i）$\pi(X)$ と $\pi(Y)$ は全単射である．

（ii）全単射 $Z \in \mathrm{End}(V)$ があって，$Z^2 = \pi(Y)^{-1}\pi(X)$ が成立する．

定数 $c_\pm, d_\pm$ は

$$c_\pm d_\pm = \pm\frac{1}{(q-q^{-1})^2} \tag{6.17}$$

をみたすものとする．このとき，次の対応 $\Pi_\pm : \{E, F, K, K^{-1}\} \to \mathrm{End}(V)$ はそれぞれ，$U_q(sl_2)$ の表現を定義する：

$$\Pi_\pm(E) = c_\pm Z\{\pi(X)^{-1} + \pi(Y)^{-1}\} \tag{6.18}$$

$$\Pi_\pm(F) = d_\pm\{\pi(X) + \pi(Y)\}Z^{-1} \tag{6.19}$$

$$\Pi_\pm(K) = \pm q^{-1}\pi(Y)^{-1}\pi(X) \tag{6.20}$$

$$\Pi_\pm(K^{-1}) = \pm q\,\pi(X)^{-1}\pi(Y). \tag{6.21}$$

この表現では，

$$\Pi_\pm(C) = \pm\frac{(1+q^2)\,\pi(Y)^{-1}\pi(X) + (1+q^{-2})\,\pi(X)^{-1}\pi(Y)}{(q-q^{-1})^2}. \tag{6.22}$$

演算子 $(U_2^f)^{-1}U_1^f$ は $L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上のユニタリ演算子である．ユニタリ演算子に対するスペクトル定理を用いると，$L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上のユニタリ演算子 Z_f で

$$Z_f^2 = (U_2^f)^{-1}U_1^f \tag{6.23}$$

をみたすものがある．

$$k_f := e^{i\pi r(f)} \tag{6.24}$$

とおく．したがって，

$$k_f^2 = q_f. \tag{6.25}$$

命題6.6を $\pi(X) = U_1^f$, $\pi(Y) = U_2^f$, $q = k_f$ の場合に応用すると，次の定理を得る：

定理 6.7 $c_\pm, d_\pm$ を

$$c_\pm d_\pm = \pm\frac{1}{(k_f - k_f^{-1})^2} = \mp\frac{1}{4\sin^2 \pi r(f)} \tag{6.26}$$

をみたす複素定数とする．このとき，次の対応 $\Pi_f^\pm : \{E, F, K, K^{-1}\} \to \mathrm{B}(L^2(\boldsymbol{R}^2))$ はそれぞれ，$U_{k_f}(sl_2)$ の表現を定義する：

$$\Pi_f^\pm(E) = c_\pm Z_f\{(U_1^f)^{-1} + (U_2^f)^{-1}\} \tag{6.27}$$

$$\Pi_f^\pm(F) = d_\pm(U_1^f + U_2^f)Z_f^{-1} \tag{6.28}$$

$$\Pi_f^\pm(K) = \pm k_f^{-1}(U_2^f)^{-1}U_1^f \tag{6.29}$$

$$\Pi_f^\pm(K^{-1}) = \pm k_f(U_1^f)^{-1}U_2^f. \tag{6.30}$$

この表現では

$$\Pi_f^\pm(C) = \pm\frac{(1+q_f)(U_2^f)^{-1}U_1^f + (1+q_f^{-1})(U_1^f)^{-1}U_2^f}{(k_f - k_f^{-1})^2}. \tag{6.31}$$

定理 6.8 $q = k_f$ の場合の $U_q(sl_2)$ 表現 $(\Pi_f^\pm, L^2(\boldsymbol{R}^2))$ はウェイトベクトルをもたない．とくに，各 $\# = \pm$ に対して，$\Pi_f^\#(U_{k_f}(sl_2))$ - 不変で非自明な有限次元部分空間は存在しない．

定理 6.9 $c_\pm^* = d_\pm$ の場合を考える．このとき：

(i) $\Pi_f^\#(U_{k_f}(sl_2))$ は $\mathrm{B}(L^2(\boldsymbol{R}^2))$ の $*$ - 部分代数である．

(ii) $(\Pi_f^\pm, L^2(\boldsymbol{R}^2))$ は完全可約である．

容易にわかるように

$$k_{2f} = q_f$$

であるから，$(\Pi_{2f}^\pm, L^2(\boldsymbol{R}^2))$ は $q = q_f$ の場合の $U_q(sl_2)$ の表現をあたえる．

定理 6.10 各 $\# = \pm$ に対して，$q = q_f$ の場合の $U_q(sl_2)$ の表現 $(\Pi_{2f}^\#, L^2(\boldsymbol{R}^2))$ の任意の既約成分は $(\Pi_f, L^2(\boldsymbol{R}^2))$ のどの既約成分ともユニタリ同値でない．

注意 6.1　$|q|=1$, $q^2\neq 1$ の場合の $U_q(sl_2)$ に対するヒルベルト空間上での非有界表現が［22］において論じられている．

7° 結　　語

最後に関連する話題について簡単にふれておく．

この稿で考察したゲージ理論は連続体 $\boldsymbol{M}$ 上の理論である．他方，格子空間 $\boldsymbol{L}$ 上のゲージ理論も考えられる．これは格子ゲージ理論とよばれる．そこで，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_L$ の場合に，連続体 $\boldsymbol{M}_L$ 上のゲージ理論と $\boldsymbol{L}$ 上の格子ゲージ理論が何らかの関係をもつのではないかと問うのは自然である．$U(1)$-ゲージ理論の場合，あるクラスのゲージ場に対して，連続体 $\boldsymbol{M}_L$ 上のゲージ理論が自然な形で $\boldsymbol{L}$ 上の格子ゲージ理論へと"簡約"されることが示される．平たく言い換えれば，連続体 $\boldsymbol{M}_L$ 上のゲージ理論がある自然な仕方で $\boldsymbol{L}$ 上の格子ゲージ理論を"生み出す"のである．この極めて興味のある"現象"の数学的詳細については，［9］を参照されたい．

次の段階の研究課題のひとつとして，量子的粒子に対して，外場としてのゲージ場だけでなく，量子化されたゲージ場も作用する状況が考えられる．実際，この方がより物理的現実に接近するはずである．この場合の予備的な結果が［10］に報告されている．

参考文献

［1］ 新井朝雄，マクスウェル方程式からゲージ場の方程式へ，数学セミナー 34巻10号（1995），27－31.

［2］ A. Arai, Gauge theory on a non-simply conneted domain and representations of canonical commutation relations, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 2569－2580.

［3］ A. Arai, Representation of canonical commutation relations in a gauge theory, the Aharonov-Bohm effect, and the Dirac-Weyl operator, *J. Nonlinear Math. Phys.* **2** (1995), 247－262.

[4] A. Arai, Canonical commutation relations in a gauge theory, the Weierstrass Zeta-function, and infinite dimensional Hilbert space representations of the quantum group $U_q(sl_2)$, *J. Math. Phys.* **37** (1996), 4203 – 4218.

[5] 新井朝雄, 量子力学とトポロジー, 数学セミナー36巻7号 (1997), 28 – 33.

[6] 新井朝雄, ゲージ理論における正準交換関係の表現とアハラノフ-ボーム効果, 荒木不二洋編『数理物理への誘い2』(遊星社, 1997) の p. 165 – 190.

[7] 新井朝雄, ヒルベルト空間と量子力学 (共立講座 21世紀の数学16), 共立出版, 1997.

[8] 新井朝雄, 非単連結空間上のゲージ理論：物理と表現論——量子群および関連する側面——, 数理物理 '97 予稿集, 1997, 学習院大学, 101 – 148.

[9] A. Arai, Representation-theoretic aspects of two-dimensional quantum systems in singular vector potentials : canonical commutation relations, quantum algebras, and reduction to lattice quantum systems, *J. Math. Phys.* **39** (1998), 2476 – 2498.

[10] A. Arai, Aspects of gauge quantum mechanics on non-simply connected spaces, ***Mathematical Methods of Quantum Physics*** [Editors : C. C. Bernido 他], Gordon and Breach, 1999, 229 – 240.

[11] 新井朝雄・江沢 洋, 量子力学の数学的構造I, 朝倉書店, 1999.

[12] 新井朝雄・江沢 洋, 量子力学の数学的構造II, 朝倉書店, 1999.

[13] K. R. Davidson, ***C^*-Algebra by Example***, AMS, Providence, 1996.

[14] J. D. Dollard and C. N. Friedman, ***Product Integration***, Encyclopedia of Mathematics and Its Applicaiton Vol. 10 : Analysis, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1979.

[15] M. Göckler and T. Schücker, ***Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity***, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[16] C. Kassel, ***Quantum Groups***, Springer, New York, 1995.

[17] 倉辻比呂志, トポロジーと物理, 丸善, 1995.

[18] 黒田成俊, スペクトル理論 II (岩波講座 基礎数学 解析学 (II) xi), 岩波書店, 1979.

[19] J. Madore, ***An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications***, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[20] K. Schmüdgen, Operator representations of $\boldsymbol{R}_q^2$, ***Publ. RIMS. Kyoto Univ.*** **28** (1992), 1029 – 1061.

[21] K. Schmüdgen, Integrable operator representations of $\boldsymbol{R}_q^2$, $X_{q,\gamma}$ and $SL_q(2, \boldsymbol{R})$, ***Commun. Math. Phys.*** **159** (1994), 217 – 237.

[22] K. Schmüdgen, Operator representations of $\mathcal{U}_q(sl_2(\boldsymbol{R}))$, ***Lett. Math. Phys.*** **37**

(1996), 211 − 222.

[23] P. B. Wiegmann and A. V. Zabrodin, Quantum groups and magnetic translations. Bethe ansatz for Asbel-Hofstadter problem, *Nuclear Phys.* **B 422** (1994), 495 − 514.

観測理論の数理

——測定による状態変化の数学理論——

小澤正直

1° はじめに

量子力学は，過去の状態から未来の測定の結果を予測する理論である．多くの場合，過去の状態もまた測定によって決められるから，過去の測定値から未来の測定値を予測する理論ということもできるであろう．実際，実験で直接検証可能なのは，理論のこの側面である．ところで，未来の予測が確率的にしかなされないというのも，量子力学のもう一つの顕著な特色である．それでは，確率論とどこが異なるのかというと，それは，測定の可能性に大きな制約が課されていることである．

その制約はしばしば不確定性原理とよばれているが，意味する内容はさまざまな形で表現されることがある．数学的な観点からみれば，測定の可能性に関する制約はすべて，物理量の非可換性からでてくる．

たとえば，古典力学では粒子の位置を表す変数 Q と運動量を表す変数 P は，当然，交換可能であり，$QP-PQ=0$ という関係をみたす．ところが，ハイゼンベルクは，量子力学では $QP-PQ=\dfrac{ih}{2\pi}$ となっていることを発見した．ここで，h はプランクが発見した作用量子の値である．この関係は正準交換関係とよばれるが，これを数学的に表現するために，量子力学では時間に従って変化する物理的変量（物理量）を線形変換で表現する．ここで，表現するとは，正準交換関係をみたす線形変換を見つけ，それらを Q と P に対応させることである．

こうすることで，物理量の変化に古典力学にはなかった全く新しい変化が

現れることになった．つまり，古典力学の物理量を線形変換で表現すると，それらはすべて互いに交換可能なので，行列の言葉でいえば，同時対角化可能であり，それぞれの物理量のとり得る値が固有値に一致することがわかる．したがって，それらすべての物理量の値を定めることと，同時対角化に用いた基底ベクトルの一つを指定することは同等であり，物理量の値の時間変化は指定される基底ベクトルが時間的に変化していくことに対応する．

一方，量子力学では，すべての物理量を同時対角化する基底が存在しない．したがって，状態の変化は，一つの基底内の変化ではなく，異なる基底の間の変化として表される．つまり，すべての物理量がある状態で定まった値をもつためには，任意のベクトルが状態として許されなければならない．このようにして，物理量を線形変換で，状態をベクトルで表現する量子力学の理論形式が導かれる．

本稿は，このような量子力学の形式の中で，どのような測定が可能か，いいかえれば，測定にどのような制約が課されるのか，という問題を考察したものである．ただし，大学3，4年生の予備知識で理解できるようにという本書の条件をみたすために，有限次元の線形代数で扱える有限準位系に題材を絞らざるをえなかった．そのため，位置や運動量のような無限次元線形空間でないと表現できない物理量の測定は扱われていない．しかし，数学的一般性はともかくとして，必要な概念構成はほとんど一般的な形で展開したので，そのような場合を扱った文献の入門の役割を十分果たすであろう．

最近では，量子力学を利用した計算機，いわゆる量子計算機の原理が発見され，それが実現すると，これまで安全とされていた公開鍵暗号の解読が可能になるなどの研究成果が報告され，注目を集めている．しかし，量子計算機を実現するためには，環境からのいわゆるデコーヒーレンスに対する対抗措置が必要であり，量子誤り訂正符号をはじめとするさまざまな仕組みを確立するために，量子情報処理の研究が盛んになってきた．また，量子テレポーテーションの発見にともない，量子情報通信や量子暗号の研究も盛んになっ

てきて，これらは，量子情報理論として大きな研究分野を形成しつつある．

これらの分野では，情報媒体はキュービットとよばれる2準位系の集まりで表現されるので，対象となる系は有限準位系である．したがって，そこで許される状態変化はすべて本稿で扱う一般的な測定過程の一部であり，本稿の内容はその基礎づけに貢献するであろう．

さて，不確定性原理の解釈のひとつに，高い精度で位置を測定すると測定後の状態では，それに反比例して一定以上の運動量の不確定性が認められるというものがある．もちろん，そのような条件をみたすものだけが測定とよぶに値するといってしまえばそれまでであるが，本稿の結論は，このような解釈が全く意味のないものであることを示唆しているであろう．

2° 線形代数と有限準位系の量子力学

内積をもつ複素線形空間 $\mathscr{H}$ は，内積から定義される距離について完備なとき，通常，ヒルベルト空間とよばれる．量子力学では，任意の量子力学系に対してその状態空間とよばれるヒルベルト空間が対応する．状態空間は通例，無限次元であるが，スピン系のようにエネルギー準位の数が有限の系では有限次元である．本稿では，理論の骨組みをわかりやすくするためにこの場合に限って議論するので，有限次元ヒルベルト空間（有限次元複素内積空間）を単に，**ヒルベルト空間**とよび，無限次元のヒルベルト空間（無限次元完備複素内積空間）を**無限次元ヒルベルト空間**とよぶことにする．また，内積 $\langle \xi, \eta \rangle$ は，物理学者の習慣に従って，ξ について共役線形，η について線形となるように表記する．

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ で定義された線形変換を $\mathscr{H}$ 上の**作用素**とよぶ．$\mathscr{H}$ 上の作用素の全体を $\mathcal{L}(\mathscr{H})$ で表す．作用素 A の**随伴作用素**を $A^\dagger$ と表記する．$A = A^\dagger$ をみたす作用素 A を**エルミート作用素**とよぶ．任意のベクトル ξ に対して，$\langle \xi, A\xi \rangle \geq 0$ となる作用素 A を**正値作用素**とよぶ．これはエルミート

作用素である．$E=E^2$ をみたすエルミート作用素を，その値域の上への**射影作用素**とよぶ．

二つのベクトル ξ, η が与えられたとき，ベクトル ψ をベクトル $\langle\eta, \psi\rangle\xi$ に変換する作用素を $|\xi\rangle\langle\eta|$ で表す．とくに，ϕ が単位ベクトル（長さが1のベクトル）ならば，$|\phi\rangle\langle\phi|$ は ϕ の張る一次元空間への射影作用素である．任意の正規直交基底 $\{\phi_i\}$ に対して，任意の作用素 A は

$$A = \sum_{ij} a_{ij} |\phi_i\rangle\langle\phi_j|$$

と表せる．このとき，$a_{ij}=\langle\phi_i, A\phi_j\rangle$ となり，(a_{ij}) は基底 $\{\phi_i\}$ に対する A の表現行列である．A がエルミートならば，ある実数列 $\{a_i\}$ と正規直交基底 $\{\phi_i\}$ があり，

$$A = \sum_{i} a_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

となる．$\{a_i\}$ は重複度をこめた固有値の族である．任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，$E^A(x)$ を部分空間 $\{\psi \in \mathscr{H} \mid A\psi = x\psi\}$ への射影作用素とすると，

$$E^A(a_n) = \sum_{i:a_i=a_n} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

かつ，固有値でない x に対して $E^A(x)=0$ となり，A のスペクトル分解

$$A = \sum_{x \in \boldsymbol{R}} x E^A(x)$$

が得られる．固有値の重複度がすべて1のとき，A は**縮退がない**といい，そのとき，$E^A(a_n)=|\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ である．

作用素 A が与えられたとき，任意の正規直交基底 $\{\phi_i\}$ に対して，$\sum_i\langle\phi_i, A\phi_i\rangle$ は共通の値をとる．それを A のトレース（跡）とよび，$\mathrm{Tr}[A]$ で表す．トレースが1の正値作用素を**密度作用素**とよび，密度作用素の全体を $\mathscr{S}(\mathscr{H})$ で表す．

量子力学では，任意の（有限準位）量子力学系 $\mathbf{S}$ に対して，その**状態空間**とよばれるヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ が対応し，$\mathbf{S}$ の**物理量**は $\mathscr{H}$ 上のエルミート作

用素で表され，**S** の**状態**は $\mathscr{H}$ 上の密度作用素で表される．

ある単位ベクトル ψ があって，状態が密度作用素 $|\psi\rangle\langle\psi|$ で表されるとき，その状態は**純粋状態**であるといい，ψ をそのベクトル状態という．単位ベクトル ψ がエルミート作用素 A の固有ベクトルであれば，ベクトル状態 ψ において物理量 A を測定すると，その固有値が測定値として得られる．一般のベクトル状態 ψ に対しては，測定値 x が得られる確率が $\|E^A(x)\psi\|^2$ で与えられる．この関係は**ボルンの統計公式**とよばれている．また，孤立系においてはベクトル状態がベクトル状態に時間発展し，系の**ハミルトニアン**とよばれる物理量を $H(t)$ とすると，時刻 t におけるベクトル状態 $\psi(t)$ は**シュレーディンガー方程式**

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{H(t)}{i\hbar}\psi(t)$$

に従う．ここで，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った値である．この方程式を解くことにより，孤立系のベクトル状態の時間発展 $\psi(t_1) \mapsto \psi(t_2)$ は，

$$\psi(t_2) = U(t_2, t_1)\psi(t_1)$$

となるユニタリ作用素 $U(t_2, t_1)$ で表されることがわかる．

密度作用素の族 $\{\rho_i\}$ と確率分布（総和が 1 の非負実数の族）$\{p_i\}$ に対して，系が状態 ρ_i にある確率が p_i であるとき，系の状態はその線形結合 $\rho = \sum_i p_i\rho_i$ で表される．（ただし，$p_i \neq 0$ となる添え字 i の集合は高々可算無限であり，無限和は，行列表現の各成分の和の収束を意味する．）このことから，任意の状態 ρ において，物理量 A を測定して，測定値 x が得られる確率が $\mathrm{Tr}\,[E^A(x)\rho]$ で与えられる．また，時刻 t における孤立系の状態 $\rho(t)$ の時間発展は $\rho(t_2) = U(t_2, t_1)\rho(t_1)U(t_2, t_1)^\dagger$ で与えられる．

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ を状態空間とする系 $\mathbf{S}_1$ とヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ を状態空間とする系 $\mathbf{S}_2$ の合成系 $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ の状態空間はテンソル積 $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ で与えられ，$\mathbf{S}_1$ の物理量 A は $\mathbf{S}$ の物理量 $A\otimes I$ と同一視され，$\mathbf{S}_2$ の物理量 B は $\mathbf{S}$ の物理量 $I\otimes B$ と同一視される．$\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ 上の作用素 $C = \sum_k A_k\otimes B_k$ に対して，

$\mathcal{K}$ 上の**部分跡**が

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[C] = \sum_k A_k \mathrm{Tr}\,[B_k]$$

で定義される．すべての A について A と $A \otimes I$ が同一の測定値の確率分布をもつことから，$\mathbf{S}$ の状態が ρ_{S} のとき，$\mathbf{S}_1$ の状態は部分跡 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[\rho_{\mathrm{S}}]$ で与えられることが導かれる．

3° 測定装置の統計的性質

量子力学の標準的な解釈に従って，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のエルミート作用素 A によって表される物理量の測定について調べてみよう．A の固有値を $a_1, a_2, \cdots$ とする．系の測定直前の状態が密度作用素 ρ で与えられるならば，測定により確率 $\mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho]$ で測定値 a_n が得られる．通常の仮説のもとでは，測定値が a_n ならば，測定直後の状態は

$$\rho_n = \frac{E^A(a_n)\rho E^A(a_n)}{\mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho]}$$

である．この仮説は**射影仮説**とよばれている．

この例からもわかるように，一般に測定装置は測定値を表す**出力変数** $\mathbf{x}$ をもち，その確率分布 $\mathrm{Pr}\,\{\mathbf{x} = x \| \rho\}$ は測定直前の状態 ρ にのみ依存する．これを装置の**出力分布**とよぶ．また，測定直前の状態 ρ と測定値 $\mathbf{x} = x$ に依存して，測定直後の状態 $\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ が決まる．この状態変化を**状態収縮**とよぶ．これらを装置の**統計的性質**といい，統計的性質が一致する二つの装置は，**統計的に同値**であるという．以下では，出力変数 $\mathbf{x}$ をもつ測定装置を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ で表す．ただし，出力変数 $\mathbf{x}$ は $\boldsymbol{R}$ の可算部分集合に値をとるとし，出力確率が 0 の $x \in \boldsymbol{R}$ に対する $\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ は不定とする．

上の例で，A を測定する装置を $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ とすると，その統計的性質は次のように表される．

$$\text{出力分布：}\qquad \Pr\{\mathbf{a}=a_n \| \rho\} = \mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho] \tag{3.1}$$

$$\text{状態収縮：}\qquad \rho_{\{\mathbf{a}=a_n\}} = \frac{E^A(a_n)\rho E^A(a_n)}{\mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho]} \tag{3.2}$$

ただし，a_n は $\mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho] > 0$ となる固有値とする．

そこで，次のような問題が考えられる．

物理量 A の測定装置は必然的に上の統計的性質をもつのだろうか？

物理量 A を測定すると，出力分布が (3.1) をみたすことは，ボルンの統計公式から要請されている．よって，物理量 A の測定はすべて (3.1) をみたさなければならない．しかし，状態収縮に関しては，測定の仕方によって (3.2) をみたさない測定が可能であり，すべての測定が射影仮説をみたすと要請することはできないことが，次のようにしてわかる．

物理量 A が縮退をもつとし，ある正規直交基底 $\{\phi_{n,m}\}$ によって，物理量 A が

$$A = \sum_{n,m} a_n |\phi_{n,m}\rangle\langle\phi_{n,m}| \tag{3.3}$$

と表現できるとする．そこで，縮退のない物理量

$$A' = \sum_{n,m} a_{n,m} |\phi_{n,m}\rangle\langle\phi_{n,m}| \tag{3.4}$$

($a_{n,m}$ はすべて異なる）を測定して，A' の測定値が $a_{n,m}$ であるとき，A の測定値が a_n であると定めることにより，A の測定の方法が一つ定まる．このとき，A' の測定が射影仮説をみたすとしても，A の測定は射影仮説をみたさない．実際，A' の測定では，確率 $\langle\phi_{n,m}, \rho\phi_{n,m}\rangle$ で測定値 $a_{n,m}$ が得られ，その場合の測定直後の状態は，射影仮説から $|\phi_{n,m}\rangle\langle\phi_{n,m}|$ となる．よって，A の測定の測定値が a_n である場合の測定直後の状態は

$$\rho_{\{\mathbf{a}=a_n\}} = \frac{1}{\sum_m \langle\phi_{n,m}, \rho\phi_{n,m}\rangle} \sum_m \langle\phi_{n,m}, \rho\phi_{n,m}\rangle |\phi_{n,m}\rangle\langle\phi_{n,m}| \tag{3.5}$$

となる．この状態は正規直交基底 $\{\phi_{n,m}\}$ の選び方に依存している．縮退のあ

る A に対しては，本質的に異なる $\{\phi_{n,m}\}$ の選び方が無数に存在し，どれをとっても (3.5) は射影仮説と矛盾する．したがって，状態収縮が測定の方法に依存することがわかる．

以上のことを一般化すると，二つの物理量 A, B に対して $A = f(B)$ という関係があるとき，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{b})$ で B を測定して測定値が $\mathbf{b} = b$ であるとき，A の測定値を $f(\mathbf{b}) = f(b)$ と出力することにより，A を測定する装置 $\mathbf{A}(f(\mathbf{b}))$ が得られる．このとき，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{b})$ が射影仮説をみたしても装置 $\mathbf{A}(f(\mathbf{b}))$ が射影仮説をみたすとは限らないということがわかる．このように，同じ A を測定する場合でも，測定方法によりさまざまな状態収縮が起こるし，測定方法も上で述べた方法だけに限らないであろう．それでは，

量子力学で許される限りで，A を測定する測定装置に起こり得る可能な状態収縮をすべて決定することは可能であろうか？

以下の節で，この問題を考えよう．

4° 反復測定の統計

状態収縮の操作的な意味を明らかにするために，ひとつの物理量の測定に引き続いてすぐ別の物理量を測定したとして，2回の測定値の結合確率分布を考察してみよう．そこで，A の測定にすぐ引き続いて，固有値 b_m をもつ物理量 B の測定を行なうとする．このとき，A の測定の測定値が a_n であるという条件のもとで，B の測定の測定値が b_m である条件付き確率は $\mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)\rho_n]$ である．したがって，A の測定で a_n を得，B の測定で b_m を得る結合確率は，

$$\begin{aligned} p_{n,m} &= \mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)\rho_n]\,\mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho] \\ &= \mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)E^A(a_n)\rho E^A(a_n)] \end{aligned}$$

である．

一般に，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による測定の直後に引き続いて，別な装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ による測定を行なったとすると，出力変数 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の結合確率分布 $\Pr\{\mathbf{x} = x,\ \mathbf{y} = y \| \rho\}$

は最初に行なわれる測定の直前の状態 ρ だけに依存して決まり，

$$\Pr\{\mathbf{x}=x,\ \mathbf{y}=y\|\rho\} = \Pr\{\mathbf{y}=y\|\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}\}\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\} \tag{4.1}$$

をみたすことがわかる．この結合確率分布は次の重要な性質をもっている．

結合確率分布の混合則： 状態 ρ が状態 ρ_1 と状態 ρ_2 の混合であって，$0<\alpha<1$ かつ $\rho=\alpha\rho_1+(1-\alpha)\rho_2$ であれば，

$$\begin{aligned}&\Pr\{\mathbf{x}=x,\ \mathbf{y}=y\|\rho\}\\ &= \alpha\Pr\{\mathbf{x}=x,\ \mathbf{y}=y\|\rho_1\}+(1-\alpha)\Pr\{\mathbf{x}=x,\ \mathbf{y}=y\|\rho_2\}\end{aligned} \tag{4.2}$$

が成り立つ．

なぜならば，系が確率 α で状態 ρ_1 にあり，確率 $1-\alpha$ で状態 ρ_2 にあるとすれば，結合確率分布はそれぞれの状態における結合確率分布の平均である右辺で表されるが，一方，その系の状態は密度作用素 ρ で表されるので，両辺は等しくなければならない．

上の例で，B を測定する装置の出力変数を $\mathbf{b}$ とすると，

$$\Pr\{\mathbf{a}=a_n,\ \mathbf{b}=b_m\|\rho\} = \mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)E^A(a_n)\rho E^A(a_n)] \tag{4.3}$$

となり，明らかに（4.2）の関係をみたす．そこで，

$$\mathbf{X}_{\mathbf{a}}(a_n,\rho) = E^A(a_n)\rho E^A(a_n)$$

とおくと，$\mathbf{X}_{\mathbf{a}}(a_n,\rho)$ は，

$$\Pr\{\mathbf{a}=a_n,\ \mathbf{b}=b_m\|\rho\} = \mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)\mathbf{X}_{\mathbf{a}}(a_n,\rho)]$$

をみたす．ここで，作用素 $\mathbf{X}_{\mathbf{a}}(a_n,\rho)$ は物理量 A と入力状態 ρ に依存しているが，物理量 B には全く依存していない．

そこで一般に，出力分布 $\Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}$ および状態収縮 $\rho\mapsto\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ が与えられているとき，

$$\mathbf{X}(x,\rho) = \Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\}\rho_{\{\mathbf{x}=x\}} \tag{4.4}$$

とおくと，$\mathbf{X}(x,\rho)$ は装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の統計的性質と測定直前の状態 ρ および測定

値 x だけから定まる作用素である．結合確率分布（4.1）において，一般の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の代わりに，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{b})$ で測定するならば，(4.1), (4.4) より，

$$\Pr\{\mathbf{x}=x,\ \mathbf{b}=b_m \| \rho\} = \mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)\mathbf{X}(x,\rho)] \tag{4.5}$$

が得られる．したがって，(4.2) から，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)\mathbf{X}(x,\rho)]\\ &= \alpha\,\mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)\mathbf{X}(x,\rho_1)] + (1-\alpha)\,\mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)\mathbf{X}(x,\rho_2)]\\ &= \mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)\,[\alpha\mathbf{X}(x,\rho_1) + (1-\alpha)\mathbf{X}(x,\rho_2)]]\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，B と b_m は任意だから，結局，

$$\mathbf{X}(x,\rho) = \alpha\mathbf{X}(x,\rho_1) + (1-\alpha)\mathbf{X}(x,\rho_2) \tag{4.6}$$

が成り立つ．

以下，各 x に対して，$\mathbf{X}(x)$ を密度作用素 ρ に作用素 $\mathbf{X}(x,\rho)$ を対応させる写像とする．任意の作用素 σ は四つの密度作用素 $\sigma_1,\cdots,\sigma_4$ と四つの正数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_4$ によって，

$$\sigma = \lambda_1\sigma_1 - \lambda_2\sigma_2 + i\lambda_3\sigma_3 - i\lambda_4\sigma_4 \tag{4.7}$$

と分解できるので，写像 $\mathbf{X}(x)$ を

$$\mathbf{X}(x)\sigma = \lambda_1\mathbf{X}(x)\sigma_1 - \lambda_2\mathbf{X}(x)\sigma_2 + i\lambda_3\mathbf{X}(x)\sigma_3 - i\lambda_4\mathbf{X}(x)\sigma_4 \tag{4.8}$$

によって，任意の作用素に対する線形変換に拡張することができる．ただし，式（4.7）の表現は一意ではないので，拡張の定義式（4.8）が作用素に対する変換を定義するためには，式（4.8）の右辺が σ の分解の仕方によらずに一意に定まらなければならないが，このことは，式（4.6）から証明することができる．

以上から，任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して，作用素の空間 $\mathcal{L}(\mathscr{H})$ 上の線形変換の族 $\{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ が一意に存在して，任意の密度作用素 ρ に対して，

$$\mathbf{X}(x)\rho = \Pr\{\mathbf{x}=x \| \rho\}\,\rho_{\{\mathbf{x}=x\}} \tag{4.9}$$

をみたすことが示された．このようにして定義される線形変換 $\mathbf{X}(x)$ を装置

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の測定値 $\mathbf{x}=x$ に対する**オペレーション**とよび，線形変換の族 $\{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ を装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**オペレーション分布**とよぶ．

式 (4.9) から明らかなように，オペレーション分布を用いると，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の統計的性質を次のように表すことができる．

$$\text{出力分布：}\quad \Pr\{\mathbf{x}=x \| \rho\} = \mathrm{Tr}\,[\mathbf{X}(x)\rho] \tag{4.10}$$

$$\text{状態収縮：}\quad \rho_{\{\mathbf{x}=x\}} = \frac{\mathbf{X}(x)\rho}{\mathrm{Tr}\,[\mathbf{X}(x)\rho]} \tag{4.11}$$

ただし，(4.11) において x は正の出力確率をもつとする．このことから，測定装置の統計的性質としてどのようなものが可能かという問題は，

$\mathcal{L}(\mathscr{H})$ 上の線形変換の族 $\{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ のうちで，ある測定装置のオペレーション分布となるのは，どういうものか？

という問題に帰着される．

5° オペレーション分布の基本性質

作用素の空間上の線形変換は任意の正値作用素を正値作用素に変換するとき，**正値変換**とよばれる．確率の正値性と (4.9) から，任意の密度作用素 ρ に対して，$\mathbf{X}(x)\rho \geq 0$ が得られる．任意の正値作用素は密度作用素の正数倍であるから，$\mathbf{X}(x)$ は正値変換であることが示される．

$\mathcal{L}(\mathscr{H})$ 上の線形変換 $\mathbf{L}$ の双対変換 $\mathbf{L}^*$ が，任意の $A, \rho \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ に対する関係

$$\mathrm{Tr}\,[A\mathbf{L}(\rho)] = \mathrm{Tr}\,[\mathbf{L}^*(A)\rho] \tag{5.1}$$

によって定義される．明らかに，$\mathbf{L}^{**}=\mathbf{L}$ で，$\mathbf{L}$ が正値変換ならば $\mathbf{L}^*$ もそうである．さらに，$0 \leq \mathbf{L}^*(I) \leq I$ となるための必要十分条件は $\rho \geq 0$ に対して $0 \leq \mathrm{Tr}\,[\mathbf{L}(\rho)] \leq \mathrm{Tr}\,[\rho]$ となることであり，$\mathbf{L}^*$ が単位的（$\mathbf{L}^*(I)=I$）であるための必要十分条件は $\mathbf{L}$ が保跡であること（任意の ρ に対して $\mathrm{Tr}\,[\mathbf{L}(\rho)] = \mathrm{Tr}\,[\rho]$）である．

そこで，オペレーション $\mathbf{X}(x)$ の双対線形変換を $\mathbf{X}(x)^*$ とし，各 $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，作用素 $X(x)$ を

$$X(x) = \mathbf{X}(x)^* I \tag{5.2}$$

で定義する．$X(x)$ を装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の測定値 $\mathbf{x} = x$ に対する**エフェクト**とよぶ．式（4.10）から装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の出力分布はエフェクトによって定まり，

$$\Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} = \mathrm{Tr}\,[X(x)\rho] \tag{5.3}$$

と表される．確率の正値性から $\mathrm{Tr}\,[X(x)\rho] \geq 0$ となり，密度作用素 ρ は任意だから，$X(x)$ は正値作用素である．

また，確率の加法性と全確率の単位性から，$\sum_{x \in \boldsymbol{R}} \mathrm{Tr}\,[X(x)\rho] = \mathrm{Tr}\,[\rho]$ となる．したがって，

$$\sum_{x \in \boldsymbol{R}} X(x) = I \tag{5.4}$$

が成り立つ．このとき，可算個の x を除いて $X(x) = 0$ である．

また，(5.3) から $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量 A を測定するための必要十分条件は

$$X(x) = E^A(x) \tag{5.5}$$

が成り立つことである．エフェクトの族 $\{X(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ を装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**エフェクト分布**とよぶ．$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量の測定装置ならば，エフェクト分布はそのスペクトル射影と一致するが，そうでない場合は，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は物理量の近似測定などの，より一般的な測定を実行すると解釈される．

ここで，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の正値変換 $\mathbf{T}$ を

$$\mathbf{T}\rho = \sum_{x \in \boldsymbol{R}} \mathbf{X}(x)\rho \tag{5.6}$$

で定義する．ここで，可算個の x を除いては，$\mathbf{X}(x) = 0$ だから，右辺の無限和は可算和である．この $\mathbf{T}$ を装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**非選択的オペレーション**とよぶ．式（5.4）から $\mathbf{T}^* I = I$ が得られるので，$\mathbf{T}$ は保跡正値変換である．

6° 物理量の測定装置のオペレーション分布

ここで一般に，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の正値変換の族 $\{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ で $\sum_{x \in \boldsymbol{R}} \mathbf{X}(x)^*I = I$ をみたすものを**単位的**正値変換族と定義し，$\mathbf{T} = \sum_{x \in \boldsymbol{R}} \mathbf{X}(x)$ をその**全変換**とよび，$X(x) = \mathbf{X}(x)^*I$ で定義される作用素族 $\{X(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ をその**作用素分布**とよぶ．明らかに，一般の測定装置のオペレーション分布は単位的正値変換族である．また，単位的正値変換の族 $\{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ で，エルミート作用素 A に対して，$\mathbf{X}(x)^*I = E^A(x)$ をみたすものを A と**両立する**正値変換族とよぶことにする．A の測定装置のオペレーション分布は A と両立する正値変換族である．

このとき，次の定理が成立する [1, 2]．

定理 6.1　$\{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ をエルミート作用素 A と両立する正値変換族とし，$\mathbf{T}$ をその全変換とすると，任意の実数 x と任意の作用素 ρ に対して，

$$\mathbf{X}(x)\rho = \mathbf{T}[E^A(x)\rho] = \mathbf{T}[\rho E^A(x)] = \mathbf{T}[E^A(x)\rho E^A(x)] \tag{6.1}$$

が成立し，任意の実数 x と任意の作用素 B に対して，

$$\mathbf{X}(x)^*B = E^A(x)\mathbf{T}^*(B) = \mathbf{T}^*(B)E^A(x) = E^A(x)\mathbf{T}^*(B)E^A(x) \tag{6.2}$$

が成立する．

この定理から，物理量 A を測定する任意の装置のオペレーション分布は非選択的オペレーションから一意に定められることがわかる．ところで，(6.2) から $\mathbf{T}^*$ の値域は A と交換する作用素からなることがわかる．そこで，A の**交換子** $\{A\}'$ を A と交換する作用素の全体とする．一般に，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の保跡正値変換 $\mathbf{L}$ の双対 $\mathbf{L}^*$ の値域が $\{A\}'$ に含まれるとき，$\mathbf{L}$ を A **両立的変換**とよぶ．

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の任意の保跡正値変換 $\mathbf{L}$ に対して，

$$\mathbf{L}'\rho = \sum_{x \in \boldsymbol{R}} \mathbf{L}[E^A(x)\rho E^A(x)]$$

とおくと，A 両立的変換 $\mathbf{L}'$ が得られる．明らかに，$\mathbf{L}$ 自身が A 両立的であるための必要十分条件は $\mathbf{L}' = \mathbf{L}$ となることである．

式 (6.2) から，A と両立する正値変換族の全変換は A 両立的変換であることがわかる．逆に，A 両立的変換 $\mathbf{T}$ が与えられたとき，任意の $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathbf{X}(x)\rho = \mathbf{T}[E^A(x)\rho]$ と定義すると，$\{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ は A と両立する正値変換族で $\mathbf{T}$ がその全変換に一致する．以上から，次の定理が得られた．

定理 6.2　A をエルミート作用素とする．任意の実数 x と任意の作用素 ρ に対する関係

$$\mathbf{X}(\mathrm{x})\rho = \mathbf{T}[E^A(x)\rho] \tag{6.3}$$

によって，A と両立する $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の正値変換族 $\{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ と A 両立的変換 $\mathbf{T}$ の間の 1 対 1 対応が与えられる．

この定理から，物理量 A を測定する装置の統計的性質は，ある A 両立的変換 $\mathbf{T}$ によって，

$$\text{出力分布：}\quad \Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} = \mathrm{Tr}\,[E^A(x)\rho] \tag{6.4}$$

$$\text{状態収縮：}\quad \rho_{\{\mathbf{x}=x\}} = \frac{\mathbf{T}[E^A(x)\rho]}{\mathrm{Tr}\,[E^A(x)\rho]} \tag{6.5}$$

と表されることが導かれる．したがって，A を測定する装置に起こり得る状態収縮を決定する問題は，

(i)　すべての A 両立的変換に対して，対応する測定装置が存在するか？

(ii)　そうではない場合に，どのような条件があれば対応する測定装置が存在すると考えられるか？

という問題に帰着される．

7° 縮退をもたない物理量の測定装置

本節では，とくに A が縮退をもたない場合について考察する．この場合は，$E^A(a_n)$ がランク1の射影作用素でそのまま固有状態を表す密度作用素になるので，

$$E^A(a_n)\rho E^A(a_n) = \mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho]E^A(a_n)$$

となり，(6.1) から

$$\mathbf{T}[E^A(a_n)\rho] = \mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho]\,\mathbf{T}[E^A(a_n)] \tag{7.1}$$

となる．そこで，入力状態 ρ と無関係な状態の族 $\{\boldsymbol{\varrho}_n\}$ を

$$\boldsymbol{\varrho}_n = \mathbf{T}[E^A(a_n)]$$

と定義すれば，

$$\rho_{\{\mathbf{x}=a_n\}} = \frac{\mathbf{T}[E^A(a_n)\rho]}{\mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho]} = \mathbf{T}[E^A(a_n)] = \boldsymbol{\varrho}_n$$

となるので，入力状態 ρ に無関係に $\rho_{\{\mathbf{x}=a_n\}} = \boldsymbol{\varrho}_n$ が成り立つ．逆に，任意の状態の族 $\{\boldsymbol{\varrho}_n\}$ に対して，

$$\mathbf{T}(\rho) = \sum_n \mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho]\,\boldsymbol{\varrho}_n \tag{7.2}$$

と $\mathcal{L}(\mathscr{H})$ 上の変換 $\mathbf{T}$ を定義すれば，これは A 両立的変換で (7.1) をみたす．

以上から，縮退のない物理量 A を測定する装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の統計的性質は，ある状態の族 $\{\boldsymbol{\varrho}_n\}$ によって，

$$\text{出力分布：}\quad \Pr\{\mathbf{x} = a_n \| \rho\} = \mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho] \tag{7.3}$$

$$\text{状態収縮：}\quad \rho_{\{\mathbf{x}=a_n\}} = \boldsymbol{\varrho}_n \tag{7.4}$$

と表され，逆に，統計的性質がこのように表されれば，ある A 両立的変換 $\mathbf{T}$ によって，(6.4)，(6.5) と表すこともできる．

このことから，縮退のない物理量 A を測定する装置に起こり得る状態収縮を決定する問題は，

どの状態族 $\{\boldsymbol{\varrho}_n\}$ が A の測定で得られるのか？

という問題に帰着される．たとえば，装置が射影仮説をみたすということは，$x = a_n$ のとき $\boldsymbol{\varrho}_n = E^A(x)$ となることと同等であるので，このような状態族が A の測定で得られることは，射影仮説から帰結する．以下の各節で，任意の族の実現可能性が議論される．

8° 測定相互作用

一般に，入力状態 ρ に対して装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による測定を行ない，その直後に装置 $\mathbf{A}(\mathbf{b})$ で物理量 B の測定をすれば，測定値の結合確率分布は（4.5）で与えられる．そこで，

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R},\ \mathbf{b} = b_m \| \rho\} = \sum_{x \in \boldsymbol{R}} \Pr\{\mathbf{x} = x,\ \mathbf{b} = b_m \| \rho\} \tag{8.1}$$

とおくと，これは A を測定する装置と対象系の間に測定のための相互作用はさせたが，測定値を得ないで，引き続いて B の測定を行ない，測定値 $\mathbf{b} = b_m$ を得る確率を表す．このような過程を**非選択的測定**とよぶ．ここで，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の非選択的オペレーションを $\mathbf{T}$ とすると，（4.5）より，

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R},\ \mathbf{b} = b_m \| \rho\} = \mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)\mathbf{T}\rho] \tag{8.2}$$

を得る．したがって，非選択的測定は入力状態 ρ を $\mathbf{T}\rho$ に変換する．

測定のために引き起こされる対象と装置の間の相互作用を**測定相互作用**とよべば，変換 $\mathbf{T}$ はこの測定相互作用から決まることになる．そこで，以下で測定相互作用の性質を調べることにしよう．

非選択的測定が入力状態 ρ を状態 $\mathbf{T}\rho$ に変換するので，対象系が ρ から $\mathbf{T}\rho$ に変化する有限な時間だけ測定相互作用が存在し，それ以前およびそれ以後は，対象系は装置から自由である．そこで，測定相互作用は測定直前の時刻 t から測定直後の時刻 $t+\Delta t$（$\Delta t > 0$）まで有限の時間だけ挿入され，時刻 $t+\Delta t$ 以降は対象は装置から自由であるとする．したがって，もし，この測定にすぐ引き続いて第二の測定装置で再び対象を測定する場合は，第二の測定

の直前の時刻はちょうど $t+\Delta t$ に一致する．このように，測定相互作用の時間的境界として，時刻 t から $t+\Delta t$ という固定した領域が設定される．

次に，測定相互作用の空間的境界を設定するために，測定装置の部分系であって，時刻 t から $t+\Delta t$ のあいだ対象とその部分系の合成系が孤立系となるようなもののうち最も狭い領域を考え，それを**プローブ系**とよぶ．

測定相互作用の効果は，プローブ系内の**プローブ物理量**とよばれるある物理量 M の時刻 t から $t+\Delta t$ までの変化として与えられる．プローブ物理量の変化は微視的対象からの作用の直接の結果であり，その相互作用ハミルトニアンには巨視的な指針などの測定装置の巨視的な部分は含まれていないと考えられる．したがって，測定相互作用は量子力学的相互作用であり，状態変化が対象とプローブ系の合成系のユニタリ時間発展として記述される．

一方，プローブ物理量の変化を指針の位置の変化のような巨視的な変化に変換するためには，時刻 $t+\Delta t$ 以後，測定装置内部でプローブ物理量の変化を増幅する，増幅過程が必要である．この増幅過程における微視的物理量から巨視的物理量への変換はちょうど，時刻 $t+\Delta t$ におけるプローブ物理量の測定に相当する．この過程を力学的に記述することは観測問題に属する問題であり，量子力学では，統計公式によってその結果の確率分布が与えられる．この増幅過程が完了する時刻を $t+\Delta t+\tau$ $(\tau>0)$ とおき，この時刻を**測定値読み取りの時刻**とよぶ．

以上のように，対象と装置の相互作用が始まってから，巨視的な測定値が確定するまでの過程は，測定相互作用と増幅過程に分割される．測定相互作用の直後には，対象は装置から自由となり，第二の装置との相互作用も可能なので，測定相互作用直後の時刻が測定直後の時刻とされる．このような測定のモデルは**間接測定のモデル**とよばれる．

測定対象 $\mathbf{S}$ の状態空間をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で表し，プローブ系 $\mathbf{P}$ の状態空間をヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ で表す．時刻 t における系 $\mathbf{S}$ の状態は装置への入力状態 ρ である．プローブ系 $\mathbf{P}$ は測定直前の時刻には常に同一の状態に準備され

るとし，それを σ とする．したがって，時刻 t の合成系の状態は，

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{S+P}}(t) = \rho \otimes \sigma$$

である．時刻 t から $t+\Delta t$ までの合成系 **S+P** の時間発展のユニタリ作用素を U とすると，時刻 $t+\Delta t$ には合成系 **S+P** は状態

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{S+P}}(t+\Delta t) = U(\rho \otimes \sigma)U^{\dagger} \tag{8.3}$$

にある．

ここで，時刻 $t+\Delta t$ に対象 **S** の物理量 B を装置 $\mathbf{A}(\mathbf{b})$ で測定したと仮定すれば，状態 ρ で装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による測定をした直後に引き続いて装置 $\mathbf{A}(\mathbf{b})$ で物理量 B を測定したことになる．一方，$\mathbf{x}$ の値は，時刻 $t+\Delta t$ におけるプローブ物理量 M の測定値であり，$\mathbf{b}$ の値は，同じ時刻における B の測定値であって，二つの測定は互いに他を乱さないので，同時測定の統計公式から，

$$\begin{aligned}
&\Pr\{\mathbf{x}=x,\ \mathbf{b}=b_m \| \rho\} \\
&= \mathrm{Tr}\,[(E^B(b_m) \otimes E^M(x))U(\rho \otimes \sigma)U^{\dagger}] \\
&= \mathrm{Tr}\,[E^B(b_m)\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,[(I \otimes E^M(x))U(\rho \otimes \sigma)U^{\dagger}]]
\end{aligned} \tag{8.4}$$

が得られる［3, 4, 5］．ここで，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}$ はヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ に対する部分跡を表す．したがって，(4.5) から，

$$\mathbf{X}(x)\rho = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,[(I \otimes E^M(x))U(\rho \otimes \sigma)U^{\dagger}] \tag{8.5}$$

が得られる．したがって，(4.10) から装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の出力分布は，

$$\Pr\{\mathbf{x}=x \| \rho\} = \mathrm{Tr}\,[(I \otimes E^M(x))U(\rho \otimes \sigma)U^{\dagger}] \tag{8.6}$$

で与えられ，(5.6) から非選択的オペレーションは

$$\mathbf{T}\rho = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,[U(\rho \otimes \sigma)U^{\dagger}] \tag{8.7}$$

で与えられる．また，(8.6) から $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のエフェクト分布は

$$X(x) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,[(I \otimes E^M(x))U(I \otimes \sigma)U^{\dagger}] \tag{8.8}$$

で与えられる．

一般に，有限次元または無限次元のヒルベルト空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{K}$ 上の密度作用素 σ，$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリ変換 U，$\mathcal{K}$ 上の離散的自己共役作用素 M の組

$(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ を測定過程とよび，単位的正値変換族 $\mathbf{X}$ に対して，任意の $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して (8.5) が成立するとき，$\mathbf{X}$ は**測定過程** $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ をもつという．さらに，$\mathbf{X}$ が装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のオペレーション分布であるとき，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は測定過程 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ をもつという．

すると以上から，測定過程 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ をもつ装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の統計的性質は，

$$\text{出力分布：}\quad \Pr\{\mathbf{x}=x \| \rho\} = \mathrm{Tr}\,[(I \otimes E^M(x))U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger] \tag{8.9}$$

$$\text{状態収縮：}\quad \rho_{\{\mathbf{x}=x\}} = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\,[(I \otimes E^A(x))U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger]}{\mathrm{Tr}\,[(I \otimes E^A(x))U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger]} \tag{8.10}$$

と表される．

これまで，どのような装置が存在するかについては，何も仮説を設けなかったが，測定装置の統計的同値類の全体を議論するために，ここで次の仮説を設けることにする．

実現可能性仮説： 任意の測定過程に対して，それをもつ装置が存在する．

また，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が測定過程をもつとき，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は**実現可能**であるという．

9° 完全正値変換族

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素の空間上の線形変換 $\mathbf{L}$ は，定義域に属する作用素の任意の有限列 $A_1, \cdots, A_n$ とベクトルの有限列 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ に対して，

$$\sum_{ij} \langle \xi_i, \mathbf{L}(A_i^\dagger A_j)\xi_j \rangle \geq 0$$

をみたすとき，**完全正値変換**とよばれる．ただし，$n \leq \dim(\mathcal{H})$ としてもかまわない．明らかに，すべての完全正値変換は正値変換である．また，ある変換が完全正値であることと，その双対変換が完全正値であることは同値である．$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の変換族 $\{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ は各 $\mathbf{X}(x)$ が完全正値のとき，**完全正値変換族**とよばれる．測定過程をもつオペレーション分布は完全正値変換

族であることが，(8.5) から容易に得られる．

その逆に，任意の単位的完全正値変換族が測定過程をもつことが，次の定理から導かれる [6, 13]．

定理 9.1　$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の単位的完全正値変換族とすると，ある有限または無限次元ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{K}$ の単位ベクトル Φ，$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリ変換 U，$\mathcal{K}$ 上の離散的自己共役作用素 M が存在して，$\mathbf{X}$ は測定過程 $(\mathcal{K}, |\Phi\rangle\langle\Phi|, U, M)$ のオペレーション分布に一致する．

したがって，測定装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が測定過程をもつための必要十分条件は，そのオペレーション分布が完全正値変換族であることである．

さて，物理量 A を測定する装置のオペレーション分布は $\mathbf{X}(x)\rho = \mathbf{T}[E^A(x)\rho]$ をみたすが，明らかに，$\mathbf{X}$ が完全正値変換族であるための必要十分条件は $\mathbf{T}$ が完全正値変換であることである．

以上から，装置が物理量 A の測定装置であるときは，実現可能な装置の統計的同値類は，A 両立的完全正値変換 $\mathbf{T}$ と 1 対 1 に対応し，その統計的性質は，(6.4)，(6.5) で表される．

また，A が縮退をもたないときは，A 両立的正値変換 $\mathbf{T}$ は，状態の可算列 $\{\boldsymbol{\varrho}_n\}$ によって (7.2) の形で表現されるので，すべて完全正値である．よって，この場合は，A を測定する任意の装置は実現可能である．したがって，測定装置の統計的同値類の全体と状態の可算列 $\{\boldsymbol{\varrho}_n\}$ とは 1 対 1 に対応して，その統計的性質は (7.3)，(7.4) で表される．

可算列 $\{\boldsymbol{\varrho}_n\}$ に対して，状態収縮が $\rho_{\{\mathbf{x}=a_n\}} = \boldsymbol{\varrho}_n$ となる測定過程を次のように直接に構成することができる．A の固有ベクトルからなる正規直交基底を ϕ_n とし，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ を $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ とする．$\boldsymbol{\varrho}_n$ のスペクトル分解を

$$\boldsymbol{\varrho}_n = \sum_j \lambda_{nj} |\eta_{nj}\rangle\langle\eta_{nj}|$$

とし，U を次の条件をみたす $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素とする．

$$U(\phi_n \otimes \phi_0 \otimes \phi_0) = \left(\sum_j \sqrt{\lambda_{nj}}\, \eta_{nj} \otimes \phi_j\right) \otimes \phi_n$$

この関係は明らかに $\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$ のある正規直交系からある正規直交系への1対1対応であるから，条件をみたすユニタリ作用素 U が存在する．ここで，$\mathscr{K}$ 上の密度作用素 σ を $\sigma = |\phi_0 \otimes \phi_0\rangle\langle\phi_0 \otimes \phi_0|$ と定義し，$\mathscr{K}$ 上のエルミート作用素 M を $M = I \otimes A$ と定義する．このようにして，測定過程 $(\mathscr{K}, \sigma, U, M)$ を定義すると，その測定装置の統計的性質が (7.3)，(7.4) をみたすことが示される．

10° 結　論

離散的な出力変数 $\mathbf{x}$ をもつ測定装置を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ とすると，それは入力状態 ρ に依存する出力分布 $\Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\}$ と測定値 $\mathbf{x} = x$ に依存する状態変化 $\rho \mapsto \rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ をもち，両者を合わせて $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の統計的性質といい，統計的性質が一致する二つの装置は**統計的に同値**であるという．

装置の統計的性質が与えられると，入力状態 ρ に対する $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の測定に引き続いて，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ で測定した場合の測定値の結合確率分布が (4.1) で与えられる．それは入力状態の混合を保存すると考えられ，この条件を結合確率分布の混合則という．この仮説のもとで，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して，そのオペレーション分布とよばれる単位的正値変換族 $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ が一意に対応して，$\mathbf{X}(x)\rho = \Pr\{\mathbf{x} = a \| \rho\}\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ をみたす．

単位的正値変換族 $\mathbf{X}$ に対して，その全変換を $\mathbf{T} = \sum_x \mathbf{X}(x)$ とする．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ はそのオペレーション分布が測定過程 $(\mathscr{K}, \sigma, U, M)$ をもつとき，実現可能であるという．このとき，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の統計的性質は，

$$\text{出力分布：}\quad \Pr\{\mathbf{x} = x \| \rho\} = \mathrm{Tr}\,[(I \otimes E^M(x))U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger]$$

$$\text{状態収縮：}\quad \rho_{\{\mathbf{x}=x\}} = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathscr{K}}\,[(I \otimes E^M(x))U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger]}{\mathrm{Tr}\,[(I \otimes E^M(x))U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger]}$$

と表される．すると，単位的正値変換族が実現可能な装置のオペレーション分布であるための必要十分条件は，それが完全正値であることである．したがって，実現可能な装置の統計的同値類は単位的完全正値変換族と1対1に対応し，統計的性質は

$$\text{出力分布：} \quad \Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\} = \mathrm{Tr}\,[\mathbf{X}(x)\rho]$$

$$\text{状態収縮：} \quad \rho_{\{\mathbf{x}=x\}} = \frac{\mathbf{X}(x)\rho}{\mathrm{Tr}\,[\mathbf{X}(x)\rho]}$$

と表される．とくに，装置が物理量 A の測定装置であるときは，実現可能な装置の統計的同値類は，A 両立的完全正値変換 $\mathbf{T}$ と1対1に対応し，その統計的性質は，

$$\text{出力分布：} \quad \Pr\{\mathbf{x}=x\|\rho\} = \mathrm{Tr}\,[E^A(x)\rho]$$

$$\text{状態収縮：} \quad \rho_{\{\mathbf{x}=x\}} = \frac{\mathbf{T}[E^A(x)\rho]}{\mathrm{Tr}\,[E^A(x)\rho]}$$

と表される．また，A が縮退をもたないときは，A 両立的正値変換 $\mathbf{T}$ はすべて完全正値であり，それはまた，状態の可算列 $\{\boldsymbol{\varrho}_n\}$ と1対1に対応する．したがって，この場合は，A を測定する任意の装置は実現可能であり，その統計的同値類と状態の可算列 $\{\boldsymbol{\varrho}_n\}$ とは1対1に対応して，その統計的性質は，

$$\text{出力分布：} \quad \Pr\{\mathbf{x}=a_n\|\rho\} = \mathrm{Tr}\,[E^A(a_n)\rho]$$

$$\text{状態収縮：} \quad \rho_{\{\mathbf{x}=a_n\}} = \boldsymbol{\varrho}_n$$

で表される．

11° 展　望

観測理論は von Neumann [7] によって基礎が築かれ，これによって，測定による状態変化とそれを引き起こす測定相互作用の存在が明らかになった．このような，非ユニタリ的な状態変化をどのように数学的に基礎づけるかに関して，Schwinger [8]，Nakamura-Umegaki [9]，Haag-Kastler [10]，Ludwig [11] などによる多くの試みがなされたが，1970年に Davies-Lewis [12] により正写像値測度の定式化が発見された．一方，測定過程の一般的な取り扱いに関する研究は1983年まで見られなかったが，[13, 6] によって初めて一般的な定式化が与えられ，測定過程をもつ測定による状態変化が完全正写像値測度で特徴づけられることが示され，測定による状態変化を数学的に特徴づける問題が最終的な解決に至った．それ以後に書かれた測定理論の解説書である Busch-Lahti-Mittelstaedt [14] では，この完全正写像値測度に基づく定式化が採用され，今日では標準的な定式化になっている．また，測定過程のこのような一般的取り扱いに関する成果は，量子力学の解釈に対する最近の教科書 van Fraassen [15] でもすでに取り入れられている．

完全正写像値測度に基づくこの新しい観測理論は，おもに [6]，[16]～[20] においてその数学的基礎が研究され，次のような問題に応用されている．

(1)　不確定性原理と重力波の検出限界に関する問題 [21]～[25]．

(2)　保存法則の測定精度に関する制限に関する問題 [6, 26, 27]．

(3)　量子情報量の上限を求める問題 [28]．

(4)　量子計算機の停止問題 [29]．

量子確率過程の理論は，1970年代に Davies によって，正写像値測度に基づく定式化が発見され，連続測定の理論などに応用されたが [30]，1990年代になって，Holevo，Barchielli，Belavkin によって，完全正写像値測度が標準的な定式化として取り入れられ，量子確率解析と結び付くことにより，

さらに飛躍的な発展をした [31]～[33].

最近では，量子情報理論の分野でこのような一般的な測定の理論が取り入れられ，さまざまな成果が得られている [34].

参考文献

[1] 小澤正直，科学基礎論研究，第87号 (Vol. 24, No. 1, 1996), 9.
[2] M. Ozawa, *Ann. Phys. (N. Y.)* **259** (1997), 121.
[3] M. Ozawa, in *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, edited by O. Hirota et. al., 233 (Plenum, New York, 1997).
[4] 小澤正直，科学基礎論研究，第89号 (Vol. 25, No. 1, 1997), 25.
[5] M. Ozawa, *Fortschr. Phys.* **46** (1998), 615.
[6] M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **25** (1984), 79.
[7] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton UP, Princeton, NJ, 1955.
[8] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.* **45** (1959), 1542.
[9] M. Nakamura and H. Umegaki, *Math. Jpn.* **7** (1962), 151.
[10] R. Haag and D. Kastler, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 848.
[11] G. Ludwig, *Z. Physik* **181** (1964), 233.
[12] E. B. Davies and J. T. Lewis, *Commun. Math. Phys.* **17** (1970), 239.
[13] M. Ozawa, *Lecture Notes in Mathematics* **1021**, 518, Springer, Berlin, 1983.
[14] P. Busch, P. J. Lahti, and P. Mittelstaedt, *The Quantum Theory of Measurement, Lecture Notes in Physics* **m2**, Springer, Berlin, 1991.
[15] B. C. van Fraassen, *Quantum Mechanics: An Empirist View*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
[16] M. Ozawa, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **21** (1985), 279.
[17] M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **26** (1985), 1948.
[18] M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **27** (1986), 759.
[19] M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **34** (1993), 5596.
[20] M. Ozawa, in *Quantum Communications and Measurement*, edited by V. P. Belavkin et. al., 109 (Plenum, New York, 1995).
[21] M. Ozawa, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988), 385.
[22] J. Maddox, *Nature* **331** (1988), 559.
[23] M. Ozawa, in *Squeezed and Nonclassical Light*, edited by P. Tombesi et. al., 263 (Plenum, New York, 1989).

[24] M. Ozawa, *Phys. Rev. A* **41** (1990), 1735.

[25] M. Ozawa, *Lecture Notes in Physics* **378**, 3, Springer, Berlin, 1991.

[26] M. Ozawa, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 1956.

[27] M. Ozawa, in *Classical and Quantum Systems: Foundations and Symmetries*, edited by H. D. Doebner et. al., 224 (World Scientific, Singapore, 1993).

[28] H. P. Yuen and M. Ozawa, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), 363.

[29] M. Ozawa, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998), 631.

[30] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, London, 1976.

[31] A. S. Holevo, *Lecture Notes in Physics* **378**, 127, Springer, Berlin, 1991.

[32] A. Barchielli, *Lecture Notes in Physics* **378**, 179, Springer, Berlin, 1991.

[33] V. P. Belavkin, *Lecture Notes in Physics* **378**, 151, Springer, Berlin, 1991.

[34] J. Preskill, *Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation*, California Institute of Technology, 1998.

編者　江沢　洋（えざわ・ひろし）—— 学習院大学理学部物理学教室

著者　新井朝雄（あらい・あさお）—— 北海道大学理学部数学教室
栗田英資（あわた・ひでとし）—— 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
磯崎　洋（いそざき・ひろし）—— 大阪大学大学院理学研究科
小澤正直（おざわ・まさなお）—— 名古屋大学情報文化学部
中西知樹（なかにし・ともき）—— 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
森田克貞（もりた・かつさだ）—— 名古屋大学大学院理学研究科物理学教室
梁　成吉（やん・そんきる）—— 筑波大学物理学系

数理物理への誘い 3——最新の動向をめぐって

2000年8月1日　第1版第1刷発行

定価はカバーに
表示しています

編　者　江沢　洋
発行者　西原昌幸
発行所　遊星社
〒164-0001 東京都中野区中野3丁目50－1
電話（03）3381-5914　振替 00140-5-137657
発売元　星雲社
〒112-0012 東京都文京区大塚3丁目21－10
電話（03）3947-1021　Fax（03）3947-1617

印刷・製本＝平河工業社　ISBN4-7952-6893-2